4.9 Integrales impropias.

Singularidad en un extremo.

Consideremos $\int_a^b \frac{g(x)}{(x-a)^p}\,dx$ con $0<p<1$. y g suave. La integral converge.

Por ejemplo $\int_0^1 x^{-p}\,dx = \frac{1}{1-p}$. Pero note que no podemos aplicar Simpson pues $f(x)=x^{-p}$ no esta definido en $x=0$.

Técnica: (restar el polinomio de Taylor). Sea $g\in C^5([a,b])$, P_4 su polinomio de Taylor de grado 4 alrededor de a. Escribimos

$$\int_a^b \frac{g(x)}{(x-a)^p}\,dx = \underbrace{\int_a^b \frac{P_4(x)}{(x-a)^p}\,dx}_{\text{exacta.}} + \underbrace{\int_a^b \frac{g(x)-P_4(x)}{(x-a)^p}\,dx}_{\text{numérica.}}$$

- La primera integral: $\int_a^b (x-a)^{k-p}\,dx = \frac{(b-a)^{k+1-p}}{k+1-p}$. $k=1,\dots,4$.
- Para la segunda: Definimos

$$G(x) = \frac{g(x)-P_4(x)}{(x-a)^p} \quad \text{si } a<x\le b \text{ y } G(a)=0$$

como $g-P_4 = \mathcal{O}((x-a)^5) = \frac{d^5}{dx^5}\frac{((g-P_4)(\xi))}{5!}(x-a)^5 = \frac{g^{(5)}(\xi)}{5!}(x-a)^5$

y G es continua. Note que:

$$\lim_{x\to a^+} G(x) = \lim_{x\to a^+} \frac{g^{(5)}(\xi)}{5!}(x-a)^{5-p} = 0 = G(a).$$

y G tiene cuatro derivadas continuas (porque $g\in C^5$) así que podemos aplicar Simpson compuesta a G.

Ejemplo: $\left(\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}}\,dx = 2.9253035\right)$ Aquí $a=0$, $p=\frac{1}{2}$,

$$P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

Parte exacta: $\int_0^1 \frac{P_4(x)}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \left(x^{-1/2} + x^{1/2} + \frac{1}{2}x^{3/2} + \frac{1}{6}x^{5/2} + \frac{1}{24}x^{7/2}\right)dx$

$$= 2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{21} + \frac{1}{108} = 2.9235450.$$

La parte numérica: Simpson compuesta. $n=4$, $h=0.25$ Sobre a G.

x	0	0.25	0.5	0.75	1
$G(x)$	0	0.0000170	0.0004013	0.0026026	0.0099485

$$\int_0^1 G\,dx \approx \frac{0.25}{3}\left[0+4(0.0000170)+2(0.0004013)+4(0.0026026)+0.0099485\right] = 0.0017691.$$

total: $2.9235450 + 0.0017691 = 2.9253141$ con error 1.1×10^{-5}.

Obs: Si la singularidad está en el extremo derecho $\int_a^b \frac{g(x)}{(b-x)^p}\,dx$ el cambio $z=-x$ lo vuelve al extremo izquierdo $\int_{-b}^{-a} \frac{g(-z)}{(z+b)^p}$ Si hay singularidad en el interior en c, se parte el intervalo $[a,c]$ y $[c,b]$.

Intervalo infinito: Para $\int_a^\infty f(x)dx$ con $a>0$ y f que decae como x^{-q} con $q>1$. El cambio $t=x^{-1}$ $(dx=-t^{-2}dt)$ da:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_0^{1/a} t^{-2} f(t^{-1})\,dt.$$

que es una integral sobre un intervalo finito, a lo sumo con singularidad en $t=0$ y se resuelve usando lo anterior.

Ejemplo: $\left(\int_1^\infty x^{-3/2}\sin\frac{1}{x}\,dx\right)$. Con $t=x^{-1}$: $x^{-3/2}=t^{3/2}$ así

$$\int_1^\infty x^{-3/2}\sin\frac{1}{x}\,dx = \int_0^1 t^{-2}\,t^{3/2}\sin t\,dt = \int_0^1 \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$$

El polinomio de Taylor de grado 4 de $\sin t = t - \frac{t^3}{6}$:

$$\int_0^1 \frac{t-t^3/6}{\sqrt{t}}\,dt = \int_0^1 \left(t^{1/2}-\frac{1}{6}t^{5/2}\right)dt = \frac{2}{3}-\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{7} = \frac{13}{21} = 0.6190476$$

Sea $G(t)=\frac{\sin t - P_4(t)}{\sqrt{t}}$, $G(0)=0$. Simpson compuesta con $n=4$, $h=0.25$.

$G(0)$, $G(0.25)$, $G(0.5)$, $G(0.75)$, $G(1)$ son: 0, 0.0000625, 0.0003610,

0.0022531₂, 0.0081376₅ por tanto

$$\int_0^1 G(t)\,dt = \frac{h}{3}\{G(0) + 4G(0.25) + 2G(0.5) + 4G(0.75) + G(1)\}$$

$$= 0.0014956.$$

así $\int_1^\infty x^{-3/2} \operatorname{sen}\frac{1}{x}\,dx = 0.6205432$ con un error de 6.6×10^{-6}

$$|\text{error}| \le \left|\frac{\left(\frac{d^5 G}{dx^5}\right)(\xi)}{5!}\right|$$

Método	Fórmula	Error
Diferencia progresiva	$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$	$-\frac{h}{2}f''(\xi)$
3 puntos, punto medio	$\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$	$-\frac{h^2}{6}f'''(\xi)$
3 puntos, extremo	$\frac{-3f_0+4f_1-f_2}{2h}$	$\frac{h^2}{3}f'''(\xi)$
5 puntos, punto medio	$\frac{f_{-2}-8f_{-1}+8f_1-f_2}{12h}$	$\frac{h^4}{30}f^{(5)}(\xi)$
Segunda derivada	$\frac{f_{-1}-2f_0+f_1}{h^2}$	$-\frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi)$
Trapecio compuesta	$\frac{h}{2}[f_0 + 2\sum f_j + f_n]$	$-\frac{b-a}{12}h^2 f''(\mu)$
Simpson compuesta	$\frac{h}{3}[f_0 + 4\sum f_{\text{imp}} + 2\sum f_{\text{par}} + f_n]$	$-\frac{b-a}{180}h^4 f^{(4)}(\mu)$
Punto medio compuesta	$2h\sum f(x_{2j})$	$\frac{b-a}{6}h^2 f''(\mu)$
Simpson adaptativa	aceptar si $\lvert S - S_2\rvert < 10\varepsilon$ $< 15\varepsilon$.	$\approx \frac{1}{15}\lvert S - S_2\rvert$
Gauss, n nodos	$\sum c_i f(x_i)$, x_i raíces de P_n	exacta hasta grado $2n-1$

Problema 14 (funciones convexas y Simpson**).** *Sea $f \in C^4[a,b]$ con $f'' > 0$ en $[a,b]$. Sean $T = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$ (trapecio simple) y $M = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ (punto medio simple).*

(a) Demuestre que $M < \int_a^b f\,dx < T$. ✓

(b) Demuestre que $\frac{T+2M}{3}$ es exactamente la regla de Simpson en $[a,b]$.

(c) Explique con los términos de error por qué los pesos $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$ son los "correctos".

Sln: Sea $\ell = b-a$.

a). Trapecio con $h = \ell$: $\int f - T = -\frac{\ell^3}{12}f''(\tilde{\xi}) < 0$. Sea $h = \frac{\ell}{2}$

$$\int f - M = \frac{(\ell/2)^3}{3}f''(\tilde{\mu}) = \frac{\ell^3}{24}f''(\tilde{\mu}) > 0 \quad \text{luego} \quad M < \int f < T.$$

b). Sea $m = \frac{a+b}{2}$.

$c_1 T + c_2 M$.

$$\frac{T+2M}{3} = \frac{1}{3}\left\{\underbrace{\frac{\ell}{2}\left(f(a)+f(b)\right)}_{\text{trapecio simple}} + \underbrace{2\ell f(m)}_{2M}\right\} = \frac{\ell}{6}\left\{f(a)+4f(m)+f(b)\right\}.$$

$\frac{1}{3}T + \frac{2}{3}M$.

$$\alpha \quad (1-\alpha) \qquad = \frac{(\ell/2)}{3}\left\{f(a)+4f(m)+f(b)\right\}.$$

Simpson en $[a,b]$. $h = \frac{\ell}{2}$.

c). Si $f'' \equiv K$: los errores serían exactamente $-\frac{\ell^3}{12}K$. y $\frac{\ell^3}{24}K$.

Entonces. $\alpha T + (1-\alpha)M$ esta fórmula no tiene error sii

$$\alpha\left(-\frac{1}{12}\right) + (1-\alpha)\cdot\frac{1}{24} = 0 \iff -2\alpha + 1 - \alpha = 0 \iff \alpha = \frac{1}{3},\ 1-\alpha = \frac{2}{3}$$

Así, los pesos $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ cancelan el término en f'' y por eso Simpson es exacta para cuadráticas. y también para cúbica.