Teoría de los problemas de Valor inicial.

El problema que vamos a tratar es el problema de valor inicial.

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y) \; ; \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha.$$

Rmk: Antes de aproximar la solución hay que estudiar dos cosas: que la solución existe y es única, y que pequeñas perturbaciones en el problema (que las da el error de redondeo) producen pequeños cambios en la solución.

Condición de Lipschitz y conjuntos Convexos:

Def: Una función $f(x,y)$ satisface la condición de Lipschitz en la variable y en un conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^2$ si existe $L > 0$ tal que

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \le L|y_1 - y_2|$$

siempre que $(t,y_1), (t,y_2) \in D$.

La constante L se llama constante de Lipschitz.

Ejemplo: Sea $f(x,y) = t|y|$ $D = \{(t,y) : 1 \le t \le 2, \; -3 \le y \le 4\}$.

Sean $(t,y_1), (t,y_2) \in D$. Usando

$$||y_1| - |y_2|| \le |y_1 - y_2| \quad (\star)$$

tenemos que:

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |t| \, ||y_1| - |y_2|| \le 2|y_1 - y_2|$$

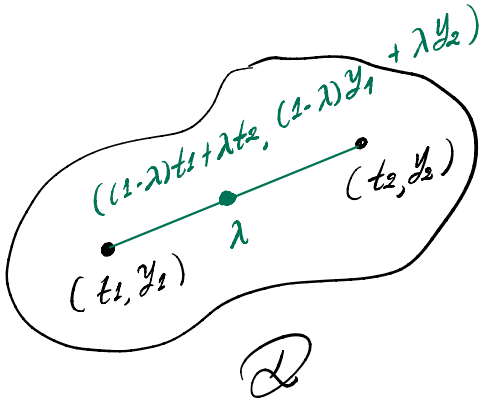
dado que $t \in [1,2]$ y $(\star)$.

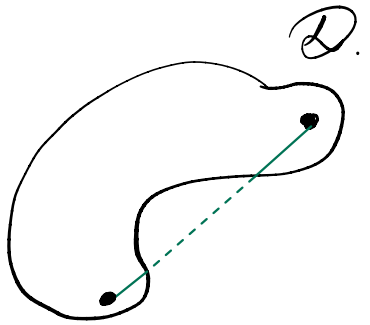
así f es Lipschitz en y con $L = 2$.

obs: Note que f no es diferenciable respecto a y en $y = 0$; la condición de Lipschitz es más débil que la derivabilidad.

$$\{\text{Funciones Diferenciables}\} \subsetneq \{\text{Funciones de Lipschitz}\}.$$

Def: Un conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^2$ es convexo si $\forall (t_1, y_1), (t_2, y_2) \in D$.
y $\forall \lambda \in [0,1]$ $((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2, (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2) \in D$.





No es convexo

Thm 1. (Criterio de Lipschitz) Sea f definida en un conjunto convexo D y existe L con

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(t,y) \right| \leq L \quad \forall (t,y) \in D.$$

Entonces f satisface la condición de Lipschitz en y en D con constante L.

Proof Sea t fijo y sean $(t, y_1), (t, y_2) \in D$. Como D es convexo todos los puntos entre (t, y_1) y (t, y_2) están en D en particular todos y entre y_1 y y_2 determinan puntos en D. Así $g(y) = f(t,y)$. y es diferenciable en el intervalo (y_1, y_2) (Suponiendo $y_1 < y_2$).
Por el teorema del Valor medio $\exists \xi \in (y_1, y_2)$ tal que.

$$\frac{g(y_1) - g(y_2)}{y_1 - y_2} = g'(\xi).$$

Note que $g'(\xi) = \frac{\partial f}{\partial y}(t, \xi)$ luego

$$|f(t,y_1) - f(t-y_2)| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t,\xi) \right| |y_1 - y_2| \leq L |y_1 - y_2| \quad \blacksquare$$

Rmk: La convexidad garantiza que el segmento vertical entre (t, y_1) y (t, y_2) este en D que es donde aplicamos teorema del

valor medio. En general, $L = \sup_D \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$.

Existencia y Unicidad:

Thm 2: Sea $D = \{(t,y) : a \le t \le b ; -\infty < y < \infty\}$ y Supongamos que f es continua en D y satisface la condición de Lipschitz en y en D

Entonces el PVI

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha.$$

tiene solución única $y(t)$ en $a \le t \le b$.

Ejemplo: $y' = 1 + t\sin(ty)$; $0 \le t \le 2$; $y(0) = 0$.

Sea t fijo y $f(t,y) = 1 + t\sin(ty)$ es una función de y. Para $y_1 < y_2$ $f(t,y)$ es diferenciable y por T.V.M existe $\xi \in (y_1, y_2)$ tal que.

$$\frac{f(t,y_1) - f(t,y_2)}{y_1 - y_2} = \frac{\partial f}{\partial y}(t,\xi)$$
$$= t^2 \cos(t\xi).$$

luego

$$\left|\frac{f(t,y_1) - f(t,y_2)}{|y_1 - y_2|}\right| = t^2 |\cos(t\xi)| \le t^2 \le 4.$$

lo que implica que

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \le 4\,|y_1 - y_2|$$ f es continua

y Lipschitz con $L = 4$ en $D = [0,2] \times \mathbb{R}$ así que el PVI tiene solución única.

Problemas bien Planteados:

Un método numérico siempre resuelve, en realidad, un problema perturbado Necesitamos que los errores no cambien demasiado la solución.

Def: (Problema bien planteado) El problema

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y), \quad a \le t \le b \quad ; \quad y(a) = \alpha$$

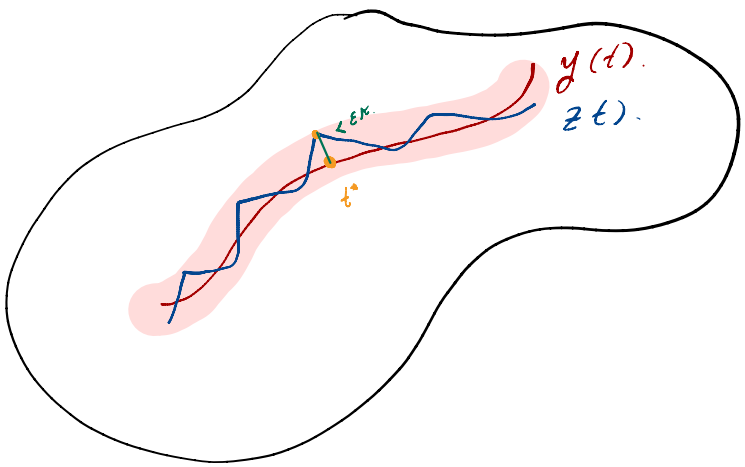
está bien planteado si:

i). Tiene una única solución $y(t)$, y

ii). $\exists \varepsilon_0 > 0$ y $K > 0$ tal que $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, siempre que $\delta(t)$ sea continua y $|\delta(t)| < \varepsilon$ en $[a,b]$ y $|\delta_0| < \varepsilon$ el problema perturbado

$$(\star\star) \quad \frac{dz}{dt} = f(t,z) + \delta(t) \; ; \quad a \le t \le b \qquad z(a) = \alpha + \delta_0$$

tiene solución única $z(t)$ que satisface $|z(t) - y(t)| < K\varepsilon \quad \forall t \in [a,b]$.



Q.

Thm 3: Si f es continua y Lipschitz en y en $D = [a,b] \times \mathbb{R}$ el problema.

$$(\star) \quad \frac{dy}{dt} = f(t,y) \; ; \quad t \in [a,b], \; y(a) = \alpha$$

está bien planteado.

Idea: Sea $e(t) = z(t) - y(t)$ Note que: la forma integral de $(\star)$ y $(\star\star)$ son respectivamente:

$$e(t) = \delta_0 + \int_a^t [f(s, z(s)) - f(s, y(s))]\, ds - \int_a^t \delta(s)\, ds$$

$$\begin{cases} e'(t) = f(t, z(t)) - f(t, y(t)) - \delta(t) \\ \quad = z'(t) - y'(t) - \delta(t) \\ \quad = \{z'(t) - \delta(t)\} - y'(t). \end{cases}$$

Ahora, por Lipschitz Note que

$$|e(t)| \le |\delta_0| + \int_a^t \underbrace{|f(s,z(s)) - f(s,y(s))|}_{\le L\int_a^t |z(s)-y(s)|\,ds.}\,ds + \int_a^t |\delta(s)|\,ds.$$

$$\le \varepsilon + L\int_a^t \underbrace{|z(s)-y(s)|}_{e(s)}\,ds + \varepsilon(b-a)$$

$$\le \varepsilon(1+b-a) + L\int_a^t |e(s)|\,ds$$

{La desigualdad de Gronwall} implica que: (¡Ver ustedes!)

$$|e(t)| \le \varepsilon(1+b-a)e^{L(t-a)}$$ y por tanto,

la condición (ii) con $K = (1+b-a)e^{L(b-a)}$ se satisface.

Ejemplo: Sea

$$y' = y - t^2 + 1 \qquad 0 \le t \le 2 \qquad y(0) = \tfrac{1}{2}.$$

con solución exacta: $y(t) = (t+1)^2 - \frac{1}{2}e^t$

Comprobando: $y'(t) = 2(t+1) - \frac{1}{2}e^t$ y $y - t^2 + 1 = t^2 + 2t + 1 - \frac{1}{2}e^t - t^2 + 1 = 2(t+1) - \frac{1}{2}e^t$

$y(0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ✓

Está bien planteado: $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$ porque $f(t,y) = y - t^2 + 1$.

así f es Lipschitz con $L = 1$ en $D = [0,2] \times \mathbb{R}$ y por tanto está bien planteado porque f es continua y Lipschitz.

Podemos verificar directamente con δ y δ_0

perturbando $z' = z - t^2 + 1 + \delta$ $\quad z(0) = \frac{1}{2} + \delta_0$ tiene solución.

$$z(t) = (t+1)^2 + (\delta + \delta_0 - \tfrac{1}{2})e^t - \delta$$

luego $|y(t) - z(t)| = |(\delta + \delta_0)e^t - \delta| \le |\delta + \delta_0|e^2 + |\delta|$

$$\le |\delta|e^2 + |\delta_0|e^2 + |\delta|e^2$$

$\leq (2|\delta| + |\delta_0|)e^2$.

Si $|\delta|, |\delta_0| < \varepsilon$ entonces $< 3\varepsilon e^2$ $K = 3e^2$.

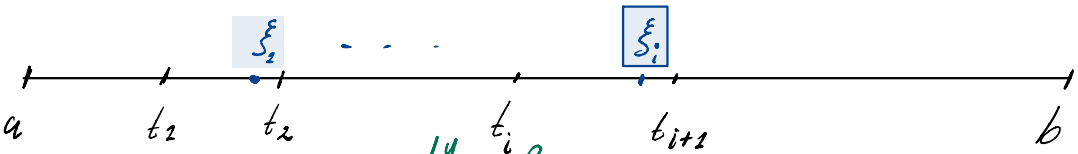
El Método de Euler:

Deducción: Sea $N > 0$ un número entero y puntos equiespaciados.

$t_i = a + ih$, $i = 0, 1, \ldots, N$ $\quad h = \frac{b-a}{N}$ (El tamaño de los subintervalos).

El objetivo es calcular $w_i \approx y(t_i)$

Deducción de Taylor: Sea $y \in C^2[a,b]$ $\forall i \; \exists \xi_i \in (t_i, t_{i+1})$



tal que $\frac{dy}{dt} = f(t,y)$

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + (t_{i+1} - t_i) y'(t_i) + \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{2} y''(\xi_i)$$

$$= y(t_i) + h f(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_i)$$

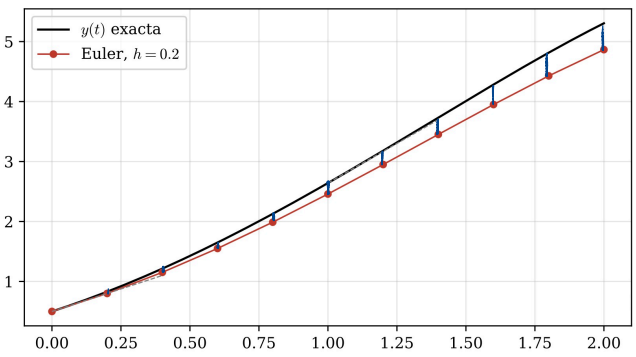
Método de Euler:

$$w_0 = \alpha, \quad w_{i+1} = w_i + h f(t_i, w_i) \qquad i = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Algoritmo: (Entradas: a, b, N, α Salida: $w \approx y(t)$ en los $N+1$ nodos).

1). $h = \frac{(b-a)}{N}$; $t = a$, $w = \alpha$; mostrar (t, w)

2). para $i = 1, \ldots, N$ $w = w + hf(t,w)$ $t = a + ih$ mostrar (t, w)



Ejemplo: $N = 10$, $h = 0.2$ $t_i = 0.2\,i$ y $w_0 = \frac{1}{2} = 0.5$.

$$w_{i+1} = w_i + 0.2\,(\underbrace{w_i - t_i^2 + 1}_{f(t_i, w_i)}).$$

$\frac{dy}{dt} = y - t^2 + 1$.
$y(0) = \frac{1}{2}$, $t \in [0,2]$

$$w_1 = 1.2(0.5) - 0.008(0)^2 + 0.2 = 0.8,$$
$$w_2 = 1.2(0.8) - 0.008(1)^2 + 0.2 = 1.152,$$
$$w_3 = 1.2(1.152) - 0.008(2)^2 + 0.2 = 1.5504.$$

t_i	w_i	$y(t_i)$	$\lvert y(t_i) - w_i \rvert$	Cota del Teorema 2.6
0.0	0.5000000	0.5000000	0.0000000	0.0000000
0.2	0.8000000	0.8292986	0.0292986	0.0375173
0.4	1.1520000	1.2140877	0.0620877	0.0833411
0.6	1.5504000	1.6489406	0.0985406	0.1393103
0.8	1.9884800	2.1272295	0.1387495	0.2076713
1.0	2.4581760	2.6408591	0.1826831	0.2911677
1.2	2.9498112	3.1799415	0.2301303	0.3931503
1.4	3.4517734	3.7324000	0.2806266	0.5177122
1.6	3.9501281	4.2834838	0.3333557	0.6698524
1.8	4.4281538	4.8151763	0.3870225	0.8556769
2.0	4.8657845	5.3054720	0.4396874	1.0826435

Cota del Error:

Lemma 1: $\forall x \geq -1$ y $\forall m \in \mathbb{Z}^+$ $0 \leq (1+x)^m \leq e^{mx}$.

Proof: Con Taylor $n = 1$. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} e^{\mu}$ donde μ esta entre 0 y x.

así que $0 \leq 1 + x \leq e^x$ luego

$(1+x)^m \leq (e^x)^m = e^{mx}$ dado que $h(x) = x^m$

es creciente. ∎

Lemma 2: (Gronwall discreto). Si $s > 0$, $t > 0$ y $\{a_i\}_{i=0}^{k}$ cumplen que

$a_0 \geq -t/s$ y $a_{i+1} \leq (1+s)a_i + t$ $\forall i = 0, \ldots, k-1$

entonces

$$a_{i+1} \leq e^{(i+1)s}\left(a_0 + \frac{t}{s}\right) - \frac{t}{s}.$$

Proof.

$$\begin{aligned}
a_{i+1} &\le (1+s)a_i + t \\
&\le (1+s)\left[(1+s)a_{i-1} + t\right] + t \\
&\le (1+s)\left[(1+s)\{(1+s)a_{i-2} + t\} + t\right] + t \\
&= (1+s)^2\{(1+s)a_{i-2} + t\} + (1+s)t + t \\
&= (1+s)^3 a_{i-2} + t(1+s)^2 + t(1+s) + t \\
&= (1+s)^3 a_{i-2} + \left[1 + (1+s) + (1+s)^2\right]t \\
&\vdots \\
&\le (1+s)^{i+1} a_0 + \left[\underbrace{1 + (1+s) + (1+s)^2 + \cdots + (1+s)^i}_{\frac{(1+s)^{i+2}-1}{(s+1)-1} = \frac{(1+s)^{i+1}-1}{s}}\right]t
\end{aligned}$$

Luego,

$$a_{i+2} \le (1+s)^{i+1} a_0 + \frac{(1+s)^{i+1}-1}{s}t = (1+s)^{i+1}a_0 + \frac{t}{s}(1+s)^{i+1} - \frac{t}{s}$$

$$= (1+s)^{i+1}\left(a_0 + \frac{t}{s}\right) - \frac{t}{s}.$$

Como $a_0 + \frac{t}{s} \ge 0$ con $x = s$ en el Lemma 1 tenemos que

$$(1+s)^{i+1} \le e^{s(i+1)}$$

i.e.,

$$a_{i+1} \le e^{s(i+1)}\left(a_0 + \frac{t}{s}\right) - \frac{t}{s} \quad \blacksquare$$

Thm 4: (Error del método de Euler) Sea f continua y Lipschitz en y con L constante en $D = [a,b]\times\mathbb{R}$ y $\exists M$ con

$$|y''(t)| \le M \quad \forall t \in [a,b]$$

donde y es la solución de $(\star)$ Entonces $\forall i = 0, \ldots, N$

$$|y(t_i) - w_i| \le \frac{hM}{2L}\left\{e^{L(t_i - a)} - 1\right\}.$$

Proof. Si $i = 0$ $\quad y(t_0) = w_0 = \alpha$. ✓

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h f(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_i) \qquad w_{i+1} = w_i + h f(t_i, w_i)$$

restando y usando $y_i = y(t_i)$

$$y_{i+1} - w_{i+1} = y_i - w_i + h\{f(t_i, y_i) - f(t_i, w_i)\} + \frac{h^2}{2} y''(\xi_i)$$

$$|y_{i+1} - w_{i+1}| \le |y_i - w_i| + h\,|f(t_i, y_i) - f(t_i, w_i)| + \frac{h^2}{2}|y''(\xi_i)|$$

$$\le |y_i - w_i| + Lh\,|y_i - w_i| + \frac{h^2 M}{2}$$

$$= (1 + Lh)\,|y_i - w_i| + \frac{h^2 M}{2}$$

usando el lema con $a_j = |y_j - w_j|$, $S = hL$, $t = \frac{h^2 M}{2}$ y $a_0 = 0$.

$$|y_{i+1} - w_{i+1}| \le e^{(i+1)hL}\left(0 + \frac{hM}{2L}\right) - \frac{hM}{2L}$$

$$= \frac{hM}{2L}\left(e^{(i+1)hL} - 1\right)$$

como $(i+1)h = t_{i+1} - a$.

$$= \frac{hM}{2L}\left(e^{(t_{i+1}-a)L} - 1\right)$$

∎