Nov 05, 2026. Ultima vez:

Thm (Error del método de Euler) Sea f continua y Lipschitz en y con L constante en $D=[a,b]\times\mathbb{R}$ y $\exists M$ con:

$$|y''(t)|\le M \quad \forall t\in[a,b]$$

donde y es la solución de $(\star)$ Entonces $\forall i=0,\dots,N$

$$|y(t_i)-w_i|\le \frac{hM}{2L}\left\{e^{L(t_i-a)}-1\right\}.$$

Acuerdos:

Parcial III Análisis II 12 de Nov.

Parcial III Análisis Numérico 19 de Nov.

Parcial IV Análisis II (Presentación 26 de Nov).

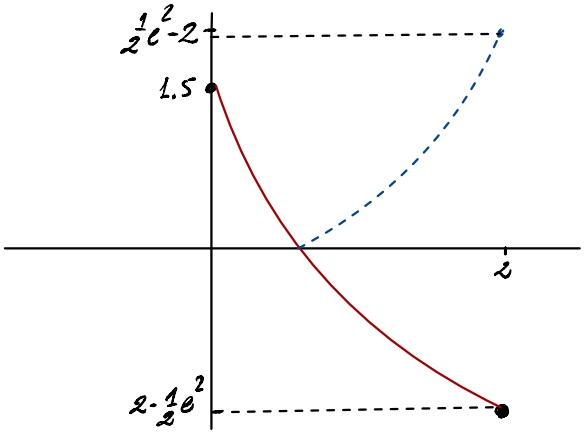
Parcial IV Análisis Numérico (Presentación 3 de Dic).

Ejemplo: Sea $L=1$. Para el problema de valor inicial

$$y'=y-t^2+1,\quad 0\le t\le 2,\quad y(0)=\frac{1}{2}.$$

$y''(t)=2-0.5e^t$ en $[0,2]$ y'' es decreciente va de 1.5

a $2-\frac{1}{2}e^2=-1.6945$



por tanto:

$$M=\max_{[0,2]}|y''(t)|=\frac{1}{2}e^2-2.$$

Con $h=0.2$

$$|y(t_i)-w_i|\le \frac{0.2\,(1.6945)}{2}\left(e^{t_i}-1\right)$$

Métodos de Taylor de orden superior

Def: Consideremos un método de diferencias. $t\in[a,b]$.

$$w_0=\alpha \qquad w_{i+1}=w_i+h\,\Phi(t_i,w_i) \qquad i=0,1,\dots,N-1.$$

Ejemplo: Para Euler $\Phi(t,w) = f(t,w)$ entonces

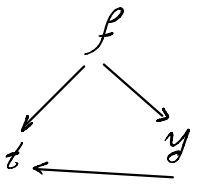
Deducción de los métodos de Taylor.

Euler usó el Taylor de órden 1. Si $y \in C^{n+1}[a,b]$, podemos usar más términos.

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h y'(t_i) + \frac{h^2}{2} y''(t_i) + \cdots + \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(t_i) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\xi_i)$$

Las derivadas de y se escriben en términos de f.

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y) \qquad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha.$$



así $y'(t) = f(t, y(t))$

$$y''(t) = f'(t, y(t)), \quad \cdots \quad y^{(k)}(t) = f^{(k-1)}(t, y(t)).$$

Método de Taylor (de órden n).

$$w_0 = \alpha \qquad w_{i+1} = w_i + h\, T^{(n)}(t_i, w_i).$$

$$T^{(n)}(t_i, w_i) = f(t_i, w_i) + \frac{h}{2} f'(t_i, w_i) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{h!} f^{(n-1)}(t_i, w_i).$$

Thm Si se usa el método de Taylor de órden n y $y \in C^{n+1}[a,b]$ su error de truncamiento es:

$$\tau_{i+1} = \frac{h^n}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\xi_i) = \mathcal{O}(h^n)$$

Proof Restando $h\, T^{(n)}(t_i, w_i)$ a ambos lados de

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h y'(t_i) + \frac{h^2}{2} y''(t_i) + \cdots + \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(t_i) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\xi_i)$$

$$y_{i+1} - y_i - h\, T^{(n)}(t_i, y_i)$$

$$= h f(t_i, w_i) + \frac{h^2}{2} f'(t_i, w_i) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n-1)}(t_i, w_i) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(\vec{\xi}_i)$$

$$- h \left(f(t_i, w_i) + \frac{h}{2} f'(t_i, w_i) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{h!} f^{(n-1)}(t_i, w_i) \right)$$

$$= \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(\vec{\xi}_i) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\xi_i)$$

Ejemplo: Sea $f(t,y) = y - t^2 + 1$ $\quad \frac{dy}{dt} = y - t^2 + 1$

$$f'(t,y) = \frac{d}{dt}(y - t^2 + 1) = y' - 2t = y - t^2 + 1 - 2t.$$

$$f''(t,y) = y' - 2t - 2 = y - t^2 + 1 - 2t - 2 = y - t^2 - 2t - 1.$$

$$f'''(t,y) = y' - 2t - 2 = y - t^2 - 2t - 1.$$

Orden 2.

$$T^{(2)}(t_i, w_i) = f + \frac{h}{2} f' = \underbrace{w_i - t_i^2 + 1}_{f(t_i, w_i)} + \frac{h}{2}\underbrace{\left(w_i - t_i^2 + 1 - 2t_i\right)}_{f'(t_i, w_i)}$$

$$= \left(w_i - t_i^2 + 1\right)\left(\frac{h}{2} + 1\right) - h t_i$$

Con $h = 0.2$ $\quad t_i = 0.2\,i$

$$w_{i+1} = w_i + 0.2\underbrace{\left[1.1\left(w_i - 0.04\,i^2 + 1\right) - 0.04\,i\right]}_{T^{(2)}(0.2\,i,\, w_i)}$$

Por ejemplo:

$$w_1 = \frac{1}{2} + 0.2\left[1.1\left(\frac{1}{2} - 0.04(0) + 1\right) - 0.04(0)\right] = 1.2158.$$

Orden 4.

$$T^{(4)}(t_i, w_i) = f + \frac{h}{2} f' + \frac{h^2}{6} f'' + \frac{h^3}{24} f'''$$

$$= \left(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{6} + \frac{h^3}{24}\right)\left(w_i - t_i^2\right) - \left(1 + \frac{h}{3} + \frac{h^2}{12}\right) h t_i + 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{6} - \frac{h^3}{24}.$$

Con $h = 0.2$: $1 + 0.1 + 0.00\overline{6} + 0.000\overline{3} = 1.107$, $\left(1 + 0.0\overline{6} + 0.000\overline{3}\right)(0.2)(0.2i) = 0.0428i$ y $1 + 0.1 - 0.00\overline{6} - 0.000\overline{3} = 1.093$, así que

$$\begin{aligned} w_{i+1} &= w_i + 0.2\left[1.107(w_i - 0.04i^2) - 0.0428i + 1.093\right] \\ &= 1.2214 w_i - 0.008856 i^2 - 0.00856 i + 0.2186. \end{aligned}$$

Por ejemplo, $w_1 = 1.2214(0.5) + 0.2186 = 0.8293$.

t_i	$y(t_i)$	Taylor orden 2	Error	Taylor orden 4	Error
0.0	0.5000000	0.5000000	0	0.5000000	0
0.2	0.8292986	0.8300000	0.0007014	0.8293000	0.0000014
0.4	1.2140877	1.2158000	0.0017123	1.2140910	0.0000034
0.6	1.6489406	1.6520760	0.0031354	1.6489468	0.0000062
0.8	2.1272295	2.1323327	0.0051032	2.1272396	0.0000101
1.0	2.6408591	2.6486459	0.0077868	2.6408744	0.0000153
1.2	3.1799415	3.1913480	0.0114065	3.1799640	0.0000225
1.4	3.7324000	3.7486446	0.0162446	3.7324321	0.0000321
1.6	4.2834838	4.3061464	0.0226626	4.2835285	0.0000447
1.8	4.8151763	4.8462986	0.0311223	4.8152377	0.0000615
2.0	5.3054720	5.3476843	0.0422123	5.3055554	0.0000834

Métodos de Runge-Kutta.

Idea: Reemplazar $f', f'', \dots$ del método de Taylor por evaluaciones de f en puntos bien elegidos, de modo que el desarrollo de Taylor coincida hasta el orden deseado.

Thm: (Taylor en dos variables). Si f y sus derivadas parciales hasta el orden $n+1$ son continuas en $D = [a,b]\times[c,d]$ y $(t_0,y_0), (t,y) \in D$ entonces existe ξ entre t y t_0 y μ entre y_0 y y con

$$f(t,y) = P_n(t,y) + R_n(t,y) \text{ donde}$$

$$P_n(t,y) = f(t_0,y_0) + \left[(t-t_0)\frac{\partial f}{\partial t} + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}\right]$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[(t-t_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2(t-t_0)(y-y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial y} + (y-y_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]$$

$$+ \cdots + \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(t-t_0)^{n-j}(y-y_0)^j\frac{\partial^n f}{\partial t^{n-j}\partial y^j}$$

$$\underbrace{\left((t-t_0)D_t f + (y-y_0)D_y f\right)^n}_{(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^{n-j}y^j}$$

con todas las derivadas en (t_0,y_0) y R_n es la expresión análoga de orden $(n+1)$ evaluada en (ξ,μ).

Método del punto medio: Deducción:

Buscamos constantes a_1, α_1, β_1 tales que:

$$a_1 f(t+\alpha_1, y+\beta_1) \text{ aproxime } T^{(2)}(t,y) = f(t,y) + \frac{h}{2}f'(t,y).$$

Con error $\mathcal{O}(h^2)$, igual al error de truncamiento del método de Taylor de orden 2.

Paso 1. (Desarrollar $T^{(2)}$:) Por la regla de la cadena

$$f'(t,y) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,y(t)) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot y' = \frac{\partial f}{\partial t} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)f$$

así

$$T^{(2)}(t,y) = f(t,y) + \frac{h}{2}\left\{\frac{\partial f}{\partial t}(t,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\, f(t,y)\right\}$$

Paso 2:

$$a_2 f(\underbrace{t+\alpha_2}_{t_0}, \underbrace{y+\beta_2}_{y_0}) = a_2 f(t,y) + a_2\alpha_2 \frac{\partial f}{\partial t}(t,y) + a_2\beta_2 \frac{\partial f}{\partial y}(t,y) + a_2 R_2$$

$t_0 - t = t+\alpha_2 - t = \alpha_2$

$y_0 - y = y+\beta_2 - y = \beta_2$.

intercambiando en la fórmula de Taylor para dos variables $t \leftrightarrow t_0$ y $y \leftrightarrow y_0$

$$R_2 = \frac{\alpha_2^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\xi,\mu) + \alpha_2\beta_2 \frac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial y}(\xi,\mu) + \frac{\beta_2^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi,\mu)$$

Paso 3: (Igualar coeficientes).

$$a_2 = 1 \qquad a_2\alpha_2 = \frac{h}{2} \qquad a_2\beta_2 = \frac{h}{2} f(t,y) \Rightarrow \alpha_2 = \frac{h}{2},\ \beta_2 = \frac{h}{2} f(t,y).$$

Método de punto medio.

$$w_0 = \alpha, \qquad w_{i+1} = w_i + h f\left(t_i + \frac{h}{2},\ w_i + \frac{h}{2} f(t_i, w_i)\right).$$

Método de Euler modificado:

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}\left[f(t_i,w_i) + f\left(t_{i+1},\ w_i + hf(t_i,w_i)\right)\right].$$

Método de Heun (orden 3):

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{4}\left[f(t_i,w_i) + 3f\left(t_i + \tfrac{2h}{3},\ w_i + \tfrac{2h}{3}k\right)\right],$$
$$k = f\left(t_i + \tfrac{h}{3},\ w_i + \tfrac{h}{3}f(t_i,w_i)\right).$$

Ejemplo: (tres métodos con $h = 0.2$ en el problema modelo)

- Primer paso del punto medio: $f(0, 1/2) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

  el punto intermedio $w_0 + 0.1\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} + 0.1\left(\frac{3}{2}\right) = 0.65$ y

  $$w_1 = 0.5 + 0.2 f\Big(0 + 0.2,\ \underbrace{w_0 + \tfrac{h}{2} f(0, 1/2)}_{0.65}\Big) = 0.5 + 0.2 f(0.1, 0.65)$$
  $$= 0.828.$$

- Primer paso de Euler Modificado: $w_0 + hf(0, 1/2) = \frac{1}{2} + 0.2 f(0, 1/2) = 0.8$

$$w_2 = \frac{1}{2} + 0.1\left\{ f(0, 1/2) + f(0.2, 0.8) \right\} = 0.826.$$

Primer paso de Heun: $k_1 = f(0, 0.5) = 1.5$; $k_2 = f\left(0.0\overline{6},\ 0.5 + 0.0\overline{6}(1.5)\right) = f(0.0\overline{6}, 0.6) = 1.5955556$; $k_3 = f\left(0.1\overline{3},\ 0.5 + 0.1\overline{3}(1.5955556)\right) = f(0.1\overline{3}, 0.7127407) = 1.6949630$; y

$$w_1 = 0.5 + 0.05\left[1.5 + 3(1.6949630)\right] = 0.8292444.$$

t_i	$y(t_i)$	Punto medio	Error	Euler modif.	Error	Heun (orden 3)	Error
0.0	0.5000000	0.5000000	0	0.5000000	0	0.5000000	0
0.2	0.8292986	0.8280000	0.0012986	0.8260000	0.0032986	0.8292444	0.0000542
0.4	1.2140877	1.2113600	0.0027277	1.2069200	0.0071677	1.2139750	0.0001127
0.6	1.6489406	1.6446592	0.0042814	1.6372424	0.0116982	1.6487659	0.0001747
0.8	2.1272295	2.1212842	0.0059453	2.1102357	0.0169938	2.1269905	0.0002390
1.0	2.6408591	2.6331668	0.0076923	2.6176876	0.0231715	2.6405555	0.0003035
1.2	3.1799415	3.1704634	0.0094781	3.1495789	0.0303627	3.1795763	0.0003653
1.4	3.7324000	3.7211654	0.0112346	3.6936862	0.0387138	3.7319803	0.0004197
1.6	4.2834838	4.2706218	0.0128620	4.2350972	0.0483866	4.2830230	0.0004608
1.8	4.8151763	4.8009586	0.0142177	4.7556185	0.0595577	4.8146966	0.0004797
2.0	5.3054720	5.2903695	0.0151025	5.2330546	0.0724173	5.3050072	0.0004648

El Método de Runge-Kutta de orden 4.

Runge Kutta de orden cuatro (RK4): $w_0 = \alpha$ para $i = 0, \dots, N-1$.

$$k_1 = h f(t_i, w_i)$$

$$k_2 = h f\left(t_i + \frac{h}{2},\ w_i + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = h f\left(t_i + \frac{h}{2},\ w_i + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = h f\left(t_{i+1},\ w_i + k_3\right)$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}\left\{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right\}.$$

Problema: Si f no depende de y entonces RK4 se reduce a Simpson.

Métodos multipaso:

Def: (Método de m pasos): Un método multipaso de m pasos para la ecuación diferencial (PI) $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$, $t \in [a, b]$, $y(a) = \alpha$. es una ecuación en diferencias de la forma:

$$w_{i+1} = a_{m-1}w_i + a_{m-2}w_{i-1} + \cdots + a_0 w_{i+1-m} + h\left\{b_m f(t_{i+1}, w_{i+1}) + b_{m-1} f(t_i, w_i) + \cdots + b_0 f(t_{i+1-m}, w_{i+1-m})\right\}$$

para $i = m-1, m, \ldots, N-1$. con valores iniciales $w_0 = \alpha, w_1 = \alpha_1, \ldots, w_{m-1} = \alpha_{m-1}$

Si $b_m = 0$ es método es explícito (abierto); $b_m \neq 0$ implícito (cerrado)

Cuidado: los valores iniciales

Un método de m pasos necesita $w_0, \ldots, w_{m-1}$ antes de empezar, pero el problema solo da $w_0 = \alpha$. Los demás se calculan con un método de un paso del mismo orden, normalmente RK4.

Deducción: integrar un polinomio interpolante:

Integrando EDO entre t_i y t_{i+1}.

$$y(t_{i+1}) - y(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t))\,dt$$

$$y_{i+1} = y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t))\,dt.$$

No sabemos $f(t, y(t))$, pero sí los valores en $t_i, t_{i-1}, \ldots, t_{i+1-m}$.