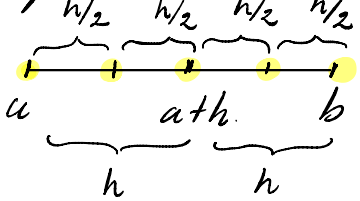
4.6 Cuadratura Adaptativa.

Estimación del error: Sea $S(a,b)$ la regla de Simpson en $[a,b]$ con $h = \frac{b-a}{2}$,

$$S(a,b) = \frac{h}{3}\{f(a) + 4f(a+h) + f(b)\}$$

$$\int_a^b f(x)dx = S(a,b) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi).$$

Apliquemos Simpson compuesta para $n=4$. con $h/2$, es decir, Simpson en cada mitad.



$$\int_a^b f\,dx = S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) + S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) - \frac{1}{16}\cdot\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\tilde{\xi}).$$

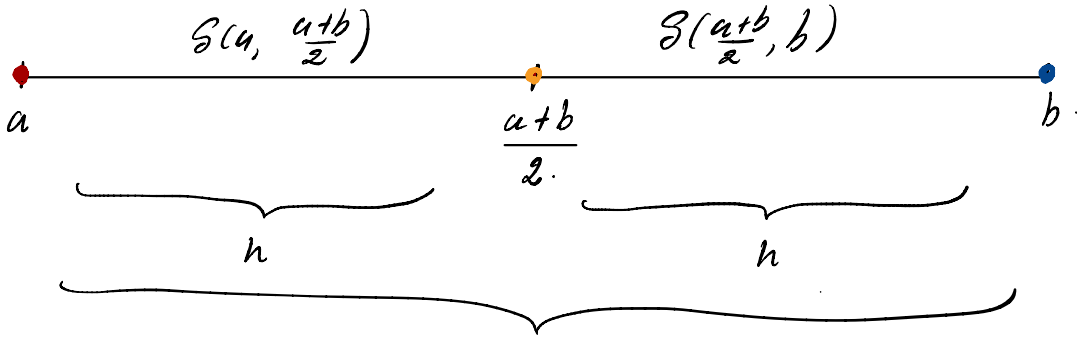
?

Obs: Recordemos: $f \in C^4[a,b]$, n es par, $h = \frac{b-a}{n}$ y $x_j = a + jh$ Existe $\mu \in (a,b)$ tal que:

$$\int_a^b f\,dx = \frac{h}{3}\left\{f(a) + 2\sum_{j=1}^{n/2-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(b)\right\} - \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\mu).$$

Con paso $h/2$. el error es

$$\frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)} = \frac{2h}{180}\cdot\frac{h^4}{16} f^{(4)} = \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{90} h^5 f^{(4)}.$$



Suposición clave: $f^{(4)}(\xi) \approx f^{(4)}(\tilde{\xi})$. Entonces definamos

$$S_2 := S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) + S\left(\frac{a+b}{2}, b\right):$$

Note que

$$S(a,b) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) \approx S_2 - \frac{1}{16}\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\tilde{\xi}) \quad \text{entonces:}$$

$$\frac{h^5}{90} \approx \frac{16}{15}\{S(a,b) - S_2\}.$$

Sustituyendo en el error de S_2:

$$\left| \int_a^b f\,dx - S_2 \right| \approx \frac{1}{16} \cdot \frac{16}{15} |S(a,b) - S_2| = \frac{1}{15} |S(a,b) - S_2|.$$

Es decir, la diferencia entre las dos aproximaciones, que sí podemos calcular, estima el error. S_2 aproxima la integral unas 15 veces mejor de lo que $S(a,b)$ aproxima a S_2.

Ejemplo: (Verificar $\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = 1$) con $h = \pi/4$.

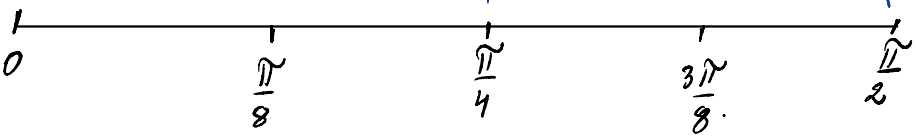
$$S\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi/4}{3}\left\{\sin(0) + 4\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\} = \frac{\pi}{12}\{0 + 2\sqrt{2} + 1\}$$

$$= \frac{\pi}{12}(2\sqrt{2}+1) = 1.002279$$

Con $h = \pi/8$.

$$S_2 = \frac{\pi}{24}\left\{\sin(0) + 4\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2\sin\frac{\pi}{4} + 4\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin\frac{\pi}{2}\right\} = 1.000134585$$

$\frac{\pi}{24}\left\{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + 4\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}$



$\frac{\pi}{24}\left\{\sin(0) + 4\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\}$

La estimación es $\frac{1}{15}|1.002279878 - 1.000134585| = 0.000143020$ y el error real de S_2 es 0.000134585 (La estimación es muy buena).

Procedimiento: Dada una tolerancia ε en $[a,b]$.

1). Calcular $S(a,b)$ y S_2.

2). Si $|S(a,b) - S_2| < 15\varepsilon$, aceptar S_2. Si se usa 10ε en lugar de 15ε la suposición $f^{(4)}(\xi) \approx f^{(4)}(\tilde{\xi})$ puede fallar.

3). Si no, aplicar el procedimiento por separado a $[a, \frac{a+b}{2}]$ y $[\frac{a+b}{2}, b]$, cada uno con tolerancia $\varepsilon/2$ y sumar

Ejemplo: $\int_1^3 \frac{100}{x^2} \operatorname{sen} \frac{10}{x}\, dx = -1.4260248$ Note que esta función cerca del 1 oscila mucho y a medida que $x \nearrow 3$ la función es más suave.

Con lo anterior y $\varepsilon = 10^{-4}$ podemos obtener:

-1.4260148, error $\approx 1.0 \times 10^{-5}$.

S_2.

4.7. Cuadratura Gaussiana: Sabemos que:

Thm: (Newton-Cotes Cerradas) Sea $\sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$ la fórmula cerrada para los $n+1$ nodos. Existe $\xi \in (a,b)$ tal que:

1). Si n es par y $f \in C^{n+2}$:

$$\int_a^b f\,dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_0^n t^2(t-1)\cdots(t-n)\,dt.$$

2). Si n es impar y $f \in C^{n+1}$:

$$\int_a^b f\,dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_0^n t(t-1)\cdots(t-n)\,dt.$$

Así, el grado de precisión es $n+1$ si n es par y n si n es impar.

En la cuadratura gaussiana

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i).$$

hay $2n$ parámetros $(c_1, \ldots, c_n, x_1, \ldots, x_n)$, así podemos aspirar a integrar los polinomios de grado $\leq 2n-1$ (que es un espacio de dim $2n$).

Ejemplo: $(n=2)$. Pidamos $(1, x, x^2, x^3)$ base de $P_3(\mathbb{R})$.

$$c_1 + c_2 = \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2, \qquad c_1 x_1 + c_2 x_2 = \int_{-1}^{1} x\,dx = 0,$$

$$c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}, \qquad c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3 = \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0.$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 2 & (1) \\ c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0 & (2) \\ c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 = \frac{2}{3} & (3) \\ c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3 = 0 & (4). \end{cases}$$

$(4) - x_2^2\,(2)$: $\quad c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3 - x_2^2(c_1 x_1 + c_2 x_2) = 0$

$$c_1 x_1 (x_1^2 - x_2^2) = 0.$$

Si $c_2 \neq 0$ y $x_2 \neq 0$: la fórmula tendría un solo nodo. $(x_1 + x_2) = 0$ o $(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ o $x_1 = -x_2$. y no integraría $1, x, x^2$ a la vez; Si $x_2 = 0$ entonces $c_2 x_2 = 0$ de la ecuación (2).

y entonces: en (3) $0 = \frac{2}{3}$. Luego, $x_1^2 = x_2^2$. y como los nodos son distintos $x_1 = -x_2$.

luego en (2) $x_1(c_1 - c_2) = 0$ así $c_1 = c_2$ en (1) $c_1 = 1 = c_2$.

luego en (3) $2x_1^2 = \frac{2}{3}$ por tanto $x_1^2 = \frac{1}{3}$ entonces $x_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

es decir, $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Por tanto;

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \text{ grado de precisión es 3.}$$

i.e, dada $f(x)$

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2}_{\in \operatorname{Span}\{1, x, x^2\}} + \frac{1}{6} f^{(3)}(\xi)$$

¡Solo con dos evaluaciones se logra el mismo grado de precisión que Simpson!

Para n grande el sistema no es lineal y difícil. La solución general usa los polinomios de Legendre $\{P_n\}$, que son ortogonales en $[-1,1]$.

donde $P_0 = 1$, $P_1 = x$, $P_2 = x^2 - \frac{1}{3}$, $P_3 = x^3 - \frac{3}{5}x$, $P_4 = x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}$,

y cumplen:

a). P_n es mónico de grado n.

b). $\int_{-1}^{1} p(x) P_n(x)\, dx = 0 \quad \forall p(x)$ t-q $\text{degree}(p(x)) < n$.

aquí $\left(P_n(x) = \text{span}\{P_0, P_1, _, P_n\};\ \langle p(x), q(x)\rangle := \int_{-1}^{1} p(x) q(x) dx \right)$.

Lemma: Las n raíces de P_n son reales, distintas y están en $(-1,1)$.

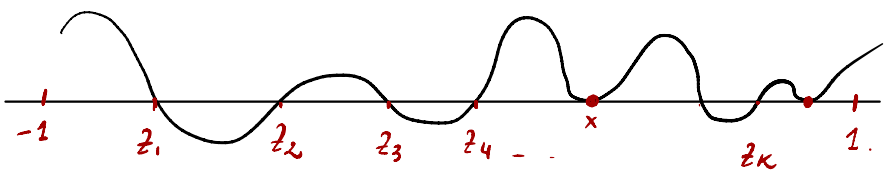
Thm: (♡). (Cuadratura de Gauss-Legendre) Sean $x_1, _, x_n$ raíces de $P_n(x)$ y

$$c_i = \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\, dx.$$

Si p es cualquier polinomio de grado $< 2n$ entonces

$$\int_{-1}^{1} p(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} c_i p(x_i).$$

Proof Lemma: Sean $z_1 < z_2 < \cdots < z_K$ los puntos en $(-1,1)$ donde P_n cambia de signo (raíces de multiplicidad impar). Supongamos que $K < n$ entonces $q(x) = \prod_{1 \le j \le K} (x - z_j)$ tiene grado $K < n$ y luego $P_n(x) q(x)$ no cambia de signo en $[-1,1]$ (los cambios de signo se cancelan dos a dos).



$q(x)$ cambia de signo en z_j $\forall j = 1, _, K$. $P_n(x) q(x) > 0$ o $P_n(x) q(x) < 0$

así $\int_{-1}^{1} p_n(x) q(x)\,dx \neq 0$ absurdo dado que $\int_{-1}^{1} p_n(x) q(x)\,dx = 0 \quad \forall q(x)$ tal que $\text{degree}(q(x)) < n$. Por tanto $k = n$. así tenemos n raíces distintas en $(-1,1)$. ∎

Proof thm: Caso 1: Supongamos $\text{degree}(P) < n$. El polinomio interpolante de P en los n nodos es el propio P. Entonces:

$$P(x) = \sum_i P(x_i) L_i(x)$$

e integrando

$$\int_{-1}^{1} P(x)\,dx = \sum_i P(x_i) \underbrace{\int_{-1}^{1} L_i(x)\,dx}_{c_i} = \sum_i c_i P(x_i).$$

Caso 2: Si $n \leq \text{degree}(P) \leq 2n-1$. Entonces por el algoritmo de la división en $P(x) = Q(x) P_n(x) + R(x)$ donde $\text{degree}(Q) < n$ y $\text{degree}(R) < n$. (El cociente tiene grado $\text{degree}(P) - n \leq n-1$) Entonces:

i). $\int_{-1}^{1} Q P_n\,dx = 0$ por la propiedad (b). dado que $\text{degree}(Q) < n$.

ii). $P(x_i) = \underbrace{Q(x_i) P_n(x_i)}_{0} + R(x_i)$. porque x_j's son nodos de P_n.

luego, por caso 1.

$$\int_{-1}^{1} P\,dx = \underbrace{\int_{-1}^{1} Q P_n\,dx}_{0} + \int_{-1}^{1} R\,dx = \sum_i c_i R(x_i)$$

$$= \sum_i c_i P(x_i)$$

∎

Sea f una función de clase $C^n([a,b])$ entonces por el thm de Taylor:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x-x_0)^j + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Noten que $\sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x-x_0)^j \in \text{Span}\{P_k\}_{k=0}^{n}$ Así.

$$\int_{-1}^{1} f(x) \approx \int_{-1}^{1} \left(\sum_{j=0}^{n}{}' \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x-x_0)^j \right) dx$$

$$= \sum_{j=1}^{n}{}' c_i P(x_i) \qquad \text{donde}$$

$$P(x) = l_1 P_0 + l_2 P_1 + \cdots + l_n P_n \quad \text{y} \quad P_j \in \{P_k\}_{k=0}^{n}$$

Intervalo arbitrario: El cambio lineal

$$t = \frac{2x-a-b}{b-a} \iff x = \frac{1}{2}\left[(b-a)t + b + a\right], \quad dx = \frac{b-a}{2} dt.$$

Lleva $[a,b]$ a $[-1,1]$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-1}^{1}{}' f\left(\frac{(b-a)t + (b+a)}{2}\right) \frac{b-a}{2} dt.$$

Ejemplo: $\int_{-1}^{1}{}' e^x \cos x\, dx$ con $n=3$. El valor exacto integrando por partes dos veces es $\left[\frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x)\right]\Big|_{-1}^{1} = 1.933421496 2$.

Con $n=3$:

$$f(-\sqrt{0.6}) = e^{-0.7745967} \cos(-0.7745967) = 0.3293993.$$

$$f(0) = 1.$$

$$f(\sqrt{0.6}) = e^{0.7745967} \cos(0.7745967) = 1.5507036.$$

$P_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x = x\left(x - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$ los nodos para $n=3$ son

$$x_1 = -\sqrt{0.6}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \sqrt{0.6}$$

$$c_1 = \int_{-1}^{1}{}' \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{3} \frac{(x-x_j)}{(x_1-x_j)} \right) dx = \int_{-1}^{1}{}' \frac{x\left(x-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)}{-\sqrt{\frac{3}{5}}\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)} dx$$

$$= \frac{5}{6} \int_{-1}^{1} \left(x^2 - x\sqrt{\frac{3}{5}}\right) dx$$

$$= \frac{5}{6} \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{5}{18}\left(x^3\Big|_{-1}^{1}\right) = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}.$$

¡ C_2, C_3 para ustedes !

$$\int_{-1}^{1} e^x \cos x\, dx \approx \frac{5}{9}\left(0.3293993 + 1.5507036\right) + \frac{8}{9}(1) = 1.9333905.$$

El error es 3.1×10^{-5} (Con $n=2$ se obtiene 1.9629728)

Ejemplo: $\left(\int_1^3 \underbrace{(x^6 - x^2 \sin 2x)}_{f(x)}\, dx = 317.3442467\right)$. aquí $a=1$, $b=3$.

así que $x = \frac{1}{2}\left[(b-a)t + b + a\right] = \frac{1}{2}\{2t+4\} = t+2$. $dx = dt$.

$$\int_1^3 f(x)\, dx = \int_{-1}^{1} f(t+2)\, dt$$

Con $n=2$ los nodos son:

$$2 \pm \sqrt{\frac{1}{3}} = 1.4226497 \text{ y } 2.5773503.$$

$$\int_1^3 f(x)\, dx \approx f(1.4226497) + f(2.5773503) = 306.8199345.$$

Método	Aproximación	Evaluaciones
Trapecio	731.6054421	2
Simpson	333.2380940	3
Gauss $n = 2$	306.8199345	2
Gauss $n = 3$	317.2641517	3
Gauss $n = 4$	317.3453903	4
Gauss $n = 5$	317.3442267	5

Calcular S_2.

4.8. Integrales Multiples.

Para $\iint_R f(x,y)\, dA$ con $R = [a,b] \times [c,d]$, escribimos la integral como iterada y aplicamos una regla unidimensional en cada variable. Con Simpson compuesta, n par en x paso $h = \frac{b-a}{n}$ y m par en y paso $k = \frac{d-c}{m}$

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dy\, dx \approx \int_a^b \frac{k}{3}\underbrace{\left\{f(x,y_0) + 2\sum_{j \text{ par}}' f(x,y_j) + 4\sum_{j \text{ impar}} f(x,y_j) + f(x,y_m)\right\}}_{g(x) \approx \int_c^d f(x,y)\, dy}\, dx$$

Aplicando Simpson a g. Si $w_i \in \{1, 4, 2, \dots, 4, 1\}$. Son los pesos de Simpson, entonces.

$$\iint_R f\,dA \approx \frac{hk}{9} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} w_i w_j f(x_i, y_j)$$

$$\text{Error} = -\frac{(d-c)(b-a)}{180}\left\{h^4 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(\bar{\eta}, \bar{\mu}) + k^4 \frac{\partial^4}{\partial y^4} f(\hat{\eta}, \hat{\mu})\right\}.$$

Ejemplo: $\left(\int_{1.4}^{2}\int_{1}^{1.5} \ln(x+2y)\,dy\,dx = 0.4295545275\right)$ Sea $n=4$, $h=0.125$

$m=2$ $\quad k=0.25$.

$$g(x_i) = \frac{0.25}{3}\left\{f(x_i, 1) + 4f(x_i, 1.25) + f(x_i, 1.5)\right\}$$

$f(x_i, 1)$ $\quad f(x_i, 1.25)$ $\quad f(x_i, 1.5)$

i	x_i	$\ln(x_i+2)$	$\ln(x_i+2.5)$	$\ln(x_i+3)$	$g(x_i)$
0	1.40	1.2237754	1.3609766	1.4816045	0.6791072
1	1.55	1.2669476	1.3987169	1.5151272	0.6980785
2	1.70	1.3083328	1.4350845	1.5475625	0.7163528
3	1.85	1.3480731	1.4701758	1.5789787	0.7339796
4	2.00	1.3862944	1.5040774	1.6094379	0.7510035

Paso 2: integral exterior. Simpson en x:

$$\frac{0.15}{3}[0.6791072 + 4(0.6980785) + 2(0.7163528) + 4(0.7339796) + 0.7510035]$$
$$= 0.05\,(8.5910487) = 0.4295524.$$

El error real es 2.09×10^{-6}.

Cota del error: $\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} = \frac{-6}{(x+2y)^4}$ y $\frac{\partial^4 f}{\partial y^4} = \frac{-96}{(x+2y)^4}$

$\left|\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right|$ y $\left|\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right|$ es máximo cuando $x+2y$ es mínimo

es decir, en 3.4 luego $\max\left|f_x^{(4)}\right| = \frac{6}{(3.4)^4} \approx 0.0449$

$$\max\left|f_y^{(4)}\right| = \frac{96}{(3.4)^4} \approx 0.7183.$$

luego $|\text{Error}| \leq \frac{(0.5)(0.6)}{180}\left\{(0.125)^4(0.0449) + (0.25)^4(0.7183)\right\}$

$\approx 4.7 \times 10^{-6}$.

Gauss en dos Variables: Se hace lo mismo de los nodos. Sea $x = 0.3u + 1.7$.

$y = 0.25v + 1.25$.

$$\frac{\mathcal{J}(u,v)}{(x,y)} = 0.075. \quad y \quad n = m = 3.$$

$$\int_{1.4}^{2.0}\int_{1.0}^{1.5} \ln(x+2y)\,dy\,dx \approx 0.075 \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_i c_j \ln(x(u_i) + 2y(v_j))$$

$$= 0.4295545312,$$

con error 3.6×10^{-9}.