UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Instituto de Matemáticas

Análisis Numérico

Parcial 1 | 2026–02

Clave de respuestas

Santiago Alzate

Nombre _____ Documento _____

Indicaciones. Tiempo máximo: 120 minutos. Los cinco problemas valen lo mismo (5 puntos en total); el bonus es opcional y vale 1.0 punto adicional, sin superar 5.0. Resuelva mostrando todos los detalles que lo llevan a la solución; no se responden preguntas.

Problema	1	2	3	4	5	Bonus	Total
Máximo	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	+1.0	5
Obtenido							

Problema 1

1.0 punto

Determine un intervalo $[a, b]$ en el cual la iteración de punto fijo es convergente para

$$x = g(x) = \left(\frac{e^x}{3}\right)^{1/2}.$$

Además, estime el número de iteraciones necesario para obtener una precisión de al menos 10^{-5}.

Solución. Escribamos $g(x) = \dfrac{e^{x/2}}{\sqrt{3}}$. Tomamos $[a, b] = [0, 1]$ y verificamos las dos hipótesis del teorema de punto fijo.

(i) g aplica $[0, 1]$ en sí mismo. Como

$$g'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{e^{x/2}}{\sqrt{3}} = \frac{g(x)}{2} > 0,$$

la función g es estrictamente creciente, de modo que

$$g([0,1]) = [g(0),\, g(1)] = \left[\tfrac{1}{\sqrt{3}},\, \sqrt{\tfrac{e}{3}}\right] \approx [0{,}5774,\ 0{,}9519] \subset [0, 1].$$

(ii) Cota de la derivada. Por ser $g' = g/2$ y g creciente, el máximo de $|g'|$ en $[0, 1]$ se alcanza en $x = 1$:

$$|g'(x)| \le \frac{g(1)}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{e}{3}} \approx 0{,}4759 =: k < 1 \qquad \text{para todo } x \in [0, 1].$$

Por el teorema de punto fijo, g tiene un *único* punto fijo p en $[0, 1]$ y la iteración $p_n = g(p_{n-1})$ converge a p para cualquier $p_0 \in [0, 1]$. Numéricamente $p \approx 0{,}91001$.

Número de iteraciones. El corolario del teorema da

$$|p_n - p| \le k^n \max\{p_0 - a,\ b - p_0\} \le k^n (b - a) = k^n.$$

Exigir $k^n \le 10^{-5}$ equivale a

$$n \;\ge\; \frac{5\ln 10}{\ln(1/k)} = \frac{11{,}5129}{0{,}7424} \;\approx\; 15{,}51,$$

es decir $\boxed{n = 16}$ iteraciones. En efecto, $k^{16} \approx 6{,}9 \times 10^{-6}$ mientras que $k^{15} \approx 1{,}5 \times 10^{-5}$. (Partiendo de $p_0 = 0$, el error real tras 16 iteraciones es $\approx 2{,}1 \times 10^{-6}$: la cota es conservadora, como siempre.)

> NOTA SOBRE EL ENUNCIADO. La función g tiene un *segundo* punto fijo, $p_2 \approx 3{,}7331$, que es repulsivo: allí $g'(p_2) = p_2/2 > 1$, de modo que la iteración se aleja de él. Por eso el enunciado pide *un* intervalo y no «el» intervalo: el método sólo sirve para el primero.

Problema 2

1.0 PUNTO

Si $p_n \in \Pi_n$ es el polinomio que interpola a f en $x_0, x_1, \ldots, x_n$, probar que $p_n + q$ es el polinomio de interpolación de Lagrange de $f + q$ en $x_0, x_1, \ldots, x_n$, para todo $q \in \Pi_n$.

SOLUCIÓN. Recordemos primero el hecho que hace funcionar todo el argumento.

Unicidad del interpolante. Dados $n+1$ nodos *distintos* $x_0, \ldots, x_n$ y valores $y_0, \ldots, y_n$, existe a lo sumo un polinomio de grado $\le n$ que cumple $P(x_i) = y_i$ para todo i. En efecto, si P y $\widetilde{P}$ son dos de ellos, entonces $r = P - \widetilde{P}$ tiene grado $\le n$ y se anula en los $n+1$ nodos distintos; un polinomio no nulo de grado $\le n$ tiene a lo sumo n raíces, luego $r \equiv 0$ y $P = \widetilde{P}$.

Sea ahora $q \in \Pi_n$ y consideremos $P := p_n + q$.

Paso 1: P tiene grado a lo sumo n. Es suma de dos polinomios de grado $\le n$, así que $P \in \Pi_n$.

Paso 2: P interpola a $f + q$ en los nodos. Para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$, usando que $p_n(x_i) = f(x_i)$ por hipótesis,

$$P(x_i) = p_n(x_i) + q(x_i) = f(x_i) + q(x_i) = (f+q)(x_i).$$

Paso 3: conclusión. P pertenece a Π_n y toma los valores de $f + q$ en los $n+1$ nodos distintos. Por la unicidad recordada arriba, P *es* el polinomio de interpolación de Lagrange de $f + q$ en esos nodos:

$$p_n + q = \sum_{k=0}^{n} \big(f+q\big)(x_k)\, L_{n,k}.$$

Observación. El enunciado expresa que el operador de interpolación $\mathcal{I}_n : h \longmapsto \sum_{k=0}^{n} h(x_k) L_{n,k}$ es *lineal* y deja fijos los elementos de Π_n: $\mathcal{I}_n(f+q) = \mathcal{I}_n f + \mathcal{I}_n q = p_n + q$, porque $\mathcal{I}_n q = q$ para $q \in \Pi_n$.

Problema 3

1.0 PUNTO

Suponga que g es continuamente diferenciable en algún intervalo (c, d) que contiene al punto fijo p de g. Muestre que si $|g'(p)| < 1$, entonces existe un $\delta > 0$ tal que si $|p_0 - p| \le \delta$, entonces la iteración de punto fijo converge.

SOLUCIÓN. **Paso 1: elegir k y δ.** Como $|g'(p)| < 1$, podemos escoger un número k con

$$|g'(p)| < k < 1, \qquad \text{por ejemplo} \qquad k = \tfrac{1}{2}\big(|g'(p)| + 1\big).$$

La derivada g' es continua en (c, d), luego $|g'|$ también lo es. Aplicando la definición de continuidad en p con $\varepsilon = k - |g'(p)| > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$[p - \delta,\ p + \delta] \subset (c, d) \qquad \text{y} \qquad |g'(x)| \le k \quad \text{para todo } x \in I_\delta := [p - \delta,\ p + \delta].$$

Paso 2: g aplica I_δ en sí mismo. Sea $x \in I_\delta$. Como $g(p) = p$, el teorema del valor medio da un ξ entre x y p —y por tanto $\xi \in I_\delta$— con

$$|g(x) - p| = |g(x) - g(p)| = |g'(\xi)|\,|x - p| \;\le\; k\,|x - p| \;\le\; k\,\delta \;\le\; \delta,$$

es decir $g(x) \in I_\delta$.

Paso 3: convergencia. Por los pasos anteriores, g es continua en I_δ, $g(I_\delta) \subseteq I_\delta$ y $|g'| \le k < 1$ en I_δ: son exactamente las hipótesis del teorema de punto fijo. Luego, para cualquier p_0 con $|p_0 - p| \le \delta$, la sucesión $p_n = g(p_{n-1})$ está bien definida, permanece en I_δ y converge al único punto fijo de g en I_δ, que es p.

Iterando la desigualdad del Paso 2 se obtiene además la velocidad:

$$|p_n - p| \;\le\; k\,|p_{n-1} - p| \;\le\; \cdots \;\le\; k^n |p_0 - p| \;\le\; k^n \delta \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Problema 4

1.0 PUNTO

Sea A una constante positiva dada y $g(x) = 2x - Ax^2$. Muestre que si la iteración de punto fijo converge a un límite no nulo, entonces el límite es $p = 1/A$; por lo que el inverso de un número se puede encontrar utilizando únicamente multiplicaciones y restas.

SOLUCIÓN. Sea $p_{n+1} = g(p_n) = 2p_n - Ap_n^2$ y supongamos que $p_n \to p$ con $p \neq 0$.

Paso 1: el límite es un punto fijo. La función g es un polinomio, luego continua. Tomando límite en la recurrencia y usando la continuidad para intercambiar g con el límite,

$$p = \lim_{n\to\infty} p_{n+1} = \lim_{n\to\infty} g(p_n) = g\Big(\lim_{n\to\infty} p_n\Big) = g(p).$$

Paso 2: resolver $p = g(p)$. La ecuación $p = 2p - Ap^2$ equivale a

$$Ap^2 - p = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad p\,(Ap - 1) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad p = 0 \;\text{ o }\; p = \frac{1}{A}.$$

Como por hipótesis $p \neq 0$, necesariamente

$$\boxed{p = \frac{1}{A}}.$$

Interpretación. La iteración se escribe

$$p_{n+1} = p_n\,(2 - Ap_n),$$

que sólo usa dos multiplicaciones y una resta y, sin embargo, converge a $1/A$: permite calcular un recíproco sin dividir. (Es la iteración de Newton aplicada a $f(x) = \frac{1}{x} - A$.)

Cuándo converge. Poniendo $e_n = 1 - Ap_n$,

$$e_{n+1} = 1 - A\big(2p_n - Ap_n^2\big) = \big(1 - Ap_n\big)^2 = e_n^2,$$

luego $e_n = e_0^{2^n}$. Por tanto $p_n \to 1/A$ —y además cuadráticamente— si y sólo si $|1 - Ap_0| < 1$, esto es, si $0 < p_0 < 2/A$. Fuera de ese rango la iteración diverge, o se queda en 0 si $p_0 = 0$.

Problema 5

1.0 PUNTO

Sea $f \in C[a, b]$ y $p \in (a, b)$ tal que $f(p) = 0$, y sea $k > 0$ fijo. Demostrar que existe $\delta > 0$ tal que $|f(x)| \le k$ para todo $x \in [p - \delta,\, p + \delta] \subseteq [a, b]$.

NOTA SOBRE EL ENUNCIADO. En la hoja del parcial la desigualdad final quedó escrita como $|f(x)| \le \delta$, con la misma letra del radio. Así enunciado el resultado es *falso*: para $f(x) = 10x$ en $[-1, 1]$ y $p = 0$ se tiene $\max_{|x|\le\delta} |f(x)| = 10\delta > \delta$ para todo $\delta > 0$. La constante k que el enunciado declara «fija» es justamente la que debe aparecer en la cota, y así se resuelve aquí.

SOLUCIÓN. Sea $k > 0$ el número dado.

Paso 1: usar la continuidad en p. Como f es continua en p, aplicando la definición con $\varepsilon = k > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|x - p| < \delta_1 \implies |f(x) - f(p)| < k.$$

Pero $f(p) = 0$, así que la implicación se lee

$$|x - p| < \delta_1 \implies |f(x)| < k.$$

Paso 2: encoger δ para quedarse dentro de $[a, b]$. Como p es interior, $p - a > 0$ y $b - p > 0$. Definamos

$$\delta = \min\left\{ \tfrac{\delta_1}{2},\ p - a,\ b - p \right\} > 0.$$

Con esta elección se tiene a la vez $[p - \delta,\ p + \delta] \subseteq [a, b]$ —porque $p - \delta \ge a$ y $p + \delta \le b$— y $\delta < \delta_1$.

Paso 3: conclusión. Si $x \in [p - \delta, p + \delta]$, entonces $|x - p| \le \delta < \delta_1$ y, por el Paso 1,

$$|f(x)| < k \le k.$$

Es decir, $|f(x)| \le k$ para todo $x \in [p - \delta, p + \delta] \subseteq [a, b]$, como se quería. ■

Dónde se usa este lema. Es el ingrediente que garantiza que, cerca de una raíz simple, los valores de f se pueden hacer tan pequeños como se quiera; se emplea al justificar los criterios de parada $|f(p_n)| < \text{tol}$ en los métodos de bisección y de Newton.

Problema bonus

+1.0 PUNTO

Sea $g \in C[a, b]$ tal que $g(x) \in [a, b]$ para todo $x \in [a, b]$. Suponga además que g' existe en (a, b) y que hay una constante $0 < k < 1$ con

$$|g'(x)| \le k \qquad \text{para todo } x \in (a, b).$$

Entonces, para cualquier $p_0 \in [a, b]$, la sucesión definida por $p_n = g(p_{n-1})$, $n \ge 1$, converge al único punto fijo p en $[a, b]$. *(Puede asumir la existencia del punto fijo único.)*

SOLUCIÓN. Sea p el único punto fijo de g en $[a, b]$, que por hipótesis podemos dar por existente.

Paso 1: la sucesión está bien definida y vive en $[a, b]$. Procedemos por inducción. Para $n = 0$, $p_0 \in [a, b]$ por hipótesis. Si $p_{n-1} \in [a, b]$, entonces, como g aplica $[a, b]$ en sí mismo, $p_n = g(p_{n-1}) \in [a, b]$. Luego $p_n \in [a, b]$ para todo $n \ge 0$ y todas las evaluaciones tienen sentido.

Paso 2: la contracción en cada paso. Sea $n \ge 1$. Si $p_{n-1} = p$ no hay nada que probar (la sucesión es constante desde ahí). Si $p_{n-1} \ne p$, como g es continua en el intervalo cerrado de extremos p_{n-1} y p —contenido en $[a, b]$— y derivable en su interior —contenido en (a, b)—, el teorema del valor medio da un ξ_n estrictamente entre p_{n-1} y p tal que

$$g(p_{n-1}) - g(p) = g'(\xi_n)\,(p_{n-1} - p).$$

Usando $p_n = g(p_{n-1})$, $p = g(p)$ y $|g'(\xi_n)| \le k$,

$$|p_n - p| = |g'(\xi_n)|\,|p_{n-1} - p| \ \le\ k\,|p_{n-1} - p|.$$

Paso 3: iterar la desigualdad. Aplicando el Paso 2 repetidamente,

$$|p_n - p| \;\le\; k\,|p_{n-1} - p| \;\le\; k^2|p_{n-2} - p| \;\le\; \cdots \;\le\; k^n\,|p_0 - p|.$$

Paso 4: pasar al límite. Como $p_0, p \in [a, b]$, se tiene $|p_0 - p| \le b - a$, y por tanto

$$0 \;\le\; |p_n - p| \;\le\; k^n\,(b - a).$$

Dado que $0 < k < 1$, $k^n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por el teorema del emparedado $|p_n - p| \to 0$, es decir

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p.$$

Y como p es el único punto fijo en $[a, b]$, el límite no depende del p_0 escogido. ■

Cotas de error que se desprenden. De los pasos anteriores salen las dos cotas habituales:

$$|p_n - p| \le k^n \max\{p_0 - a,\; b - p_0\}, \qquad |p_n - p| \le \frac{k^n}{1 - k}\,|p_1 - p_0|,$$

que son las que se usan para estimar cuántas iteraciones hacen falta (véase el Problema 1).