UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Instituto de Matemáticas

Análisis Numérico

Parcial | 2026–02

Clave de respuestas

Santiago Alzate

Nombre _____ Documento _____

Indicaciones. Tiempo máximo: 120 minutos. Los cinco problemas valen lo mismo (5 puntos en total); el bonus es opcional y vale 1.0 punto adicional, sin superar 5.0. No se permite calculadora. Justifique todos los procedimientos; no se responden preguntas.

Problema	1	2	3	4	5	Bonus	Total
Máximo	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	+1.0	5
Obtenido							

Problema 1

1.0 punto

Suponga que los valores de f se conocen con errores de redondeo: $\tilde{f}(x) = f(x) - e(x)$ con $|e(x)| \leq \varepsilon$, y que $|f^{(4)}| \leq M$. Recuerde que, si $f \in C^4$, existe $\xi \in (x_0 - h, x_0 + h)$ con

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi).$$

a. Demuestre que

$$\left| f''(x_0) - \frac{\tilde{f}(x_0+h) - 2\tilde{f}(x_0) + \tilde{f}(x_0-h)}{h^2} \right| \leq \frac{4\varepsilon}{h^2} + \frac{h^2}{12} M.$$

b. Halle el $h > 0$ que minimiza la cota y justifique que es un mínimo.

Solución. **(a)** Por la fórmula de la segunda derivada,

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi).$$

Escribiendo $f = \tilde{f} + e$ en el cociente,

$$f''(x_0) - \frac{\tilde{f}(x_0+h) - 2\tilde{f}(x_0) + \tilde{f}(x_0-h)}{h^2} = \frac{e(x_0+h) - 2e(x_0) + e(x_0-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi).$$

Por la desigualdad triangular, $|e(x_0+h) - 2e(x_0) + e(x_0-h)| \leq \varepsilon + 2\varepsilon + \varepsilon = 4\varepsilon$, y $|f^{(4)}(\xi)| \leq M$. Esto da la cota.

(b) Sea $E(h) = 4\varepsilon h^{-2} + \frac{M}{12}h^2$. Entonces $E'(h) = -8\varepsilon h^{-3} + \frac{M}{6}h = 0 \iff h^4 = \frac{48\varepsilon}{M}$, es decir, $h_{\text{óptt}} = \left(\frac{48\varepsilon}{M}\right)^{1/4}$. Es un mínimo porque $E''(h) = 24\varepsilon h^{-4} + \frac{M}{6} > 0$ para todo $h > 0$. (También: $E \to \infty$ cuando $h \to 0^+$ y cuando $h \to \infty$, y $h_{\text{óptt}}$ es el único punto crítico.)

□

Problema 2

1.0 PUNTO

Sean $f \in C^2[a,b]$, $n \geq 1$, $h = \frac{b-a}{n}$ y $x_j = a + jh$ para $j = 0, \ldots, n$. Demuestre que existe $\mu \in (a,b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{2}\Big[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b)\Big] - \frac{b-a}{12}h^2 f''(\mu).$$

Puede usar la regla del trapecio simple: $\int_{x_0}^{x_1} f\,\mathrm{d}x = \frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)] - \frac{h^3}{12}f''(\xi)$ con $\xi \in (x_0, x_1)$. Incluya un dibujo de la partición que muestre en qué subintervalos aparece cada nodo.

SOLUCIÓN. *Paso 1: la partición.* Partimos $[a,b]$ en los n subintervalos $T_j = [x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \ldots, n$, todos de longitud h (Figura 1).

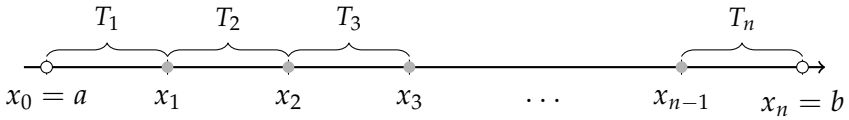


Figura 1: Gris: nodos interiores, cada uno extremo de *dos* subintervalos. Blanco: a y b, extremos de uno solo.

Paso 2: regla simple en cada subintervalo. Por la aditividad de la integral y la regla del trapecio simple, existe $\xi_j \in (x_{j-1}, x_j)$ tal que

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{n}\int_{x_{j-1}}^{x_j} f\,\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{n}\Big\{\frac{h}{2}\big[f(x_{j-1}) + f(x_j)\big] - \frac{h^3}{12}f''(\xi_j)\Big\}.$$

Paso 3: sumar las reglas. $f(a)$ aparece solo en T_1 y $f(b)$ solo en T_n, cada uno con coeficiente $\frac{h}{2}$. Cada nodo interior x_j, $1 \leq j \leq n-1$, es extremo derecho de T_j y extremo izquierdo de T_{j+1}, con coeficiente $\frac{h}{2} + \frac{h}{2} = 2 \cdot \frac{h}{2}$. Así, $\sum_{j=1}^{n} \frac{h}{2}[f(x_{j-1}) + f(x_j)] = \frac{h}{2}\big[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b)\big]$.

Paso 4: sumar los errores. Por el resultado de promedios (con $c_j = 1$), existe μ con $\sum_{j=1}^{n} f''(\xi_j) = n\,f''(\mu)$. Más precisamente, μ está entre los dos ξ_j donde f'' alcanza su menor y su mayor valor, así que $\mu \in (a,b)$. Entonces

$$-\frac{h^3}{12}\sum_{j=1}^{n} f''(\xi_j) = -\frac{h^2}{12}(nh)f''(\mu) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\mu),$$

porque $nh = b - a$. Juntando los Pasos 3 y 4 se obtiene la fórmula. □

Problema 3

1.0 PUNTO

Suponga que cada valor $f(x_i)$ se reemplaza por $\tilde{f}(x_i)$ con $|f(x_i) - \tilde{f}(x_i)| \leq \varepsilon$. Demuestre que el error de redondeo acumulado en la regla del trapecio compuesta ($h = \frac{b-a}{n}$) y en la del punto medio compuesta (n par, $h = \frac{b-a}{n+2}$, $2h\sum_{j=0}^{n/2} f(x_{2j})$) es a lo sumo $(b-a)\varepsilon$, independiente de n.

SOLUCIÓN. Sea $e_i = f(x_i) - \tilde{f}(x_i)$, con $|e_i| \leq \varepsilon$. Por la desigualdad triangular:

Trapecio ($nh = b - a$):

$$\Big|\frac{h}{2}\Big[e_0 + 2\sum_{j=1}^{n-1} e_j + e_n\Big]\Big| \leq \frac{h}{2}\big[\varepsilon + 2(n-1)\varepsilon + \varepsilon\big] = nh\varepsilon = (b-a)\varepsilon.$$

Punto medio ($(n+2)h = b - a$, con $\frac{n}{2} + 1$ evaluaciones):

$$\Big|2h\sum_{j=0}^{n/2} e_{2j}\Big| \leq 2h\Big(\frac{n}{2} + 1\Big)\varepsilon = (n+2)h\varepsilon = (b-a)\varepsilon.$$

La cota no crece al refinar: ambas reglas son **estables**. □

Problema 4

1.0 PUNTO

Sean $x_1, \ldots, x_n$ las raíces del polinomio de Legendre P_n, $L_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$ y $c_i = \int_{-1}^{1} L_i(x)\,\mathrm{d}x$. Puede usar el teorema de cuadratura gaussiana: $\int_{-1}^{1} P(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} c_i P(x_i)$ para todo polinomio P de grado $< 2n$.

a. Demuestre que $c_i = \int_{-1}^{1} [L_i(x)]^2\,\mathrm{d}x$. Concluya que $c_i > 0$.

b. Demuestre que $\sum_{i=1}^{n} c_i = 2$.

c. Si cada $f(x_i)$ se calcula con error a lo sumo ε, demuestre que el error acumulado en $\sum c_i f(x_i)$ es a lo sumo 2ε.

SOLUCIÓN. **(a)** L_i tiene grado $n-1$, así que L_i^2 tiene grado $2n-2 < 2n$, y la regla lo integra exactamente:

$$\int_{-1}^{1} L_i^2\,\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{n} c_j\,[L_i(x_j)]^2 = c_i,$$

porque $L_i(x_j) = 0$ si $j \neq i$ y $L_i(x_i) = 1$. Como $L_i^2 \geq 0$ es continua y no es idénticamente nula (vale 1 en x_i), $c_i = \int L_i^2 > 0$.

(b) La regla es exacta para $f \equiv 1$ (grado $0 < 2n$): $\sum_i c_i = \int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}x = 2$.

(c) Si $|e_i| \leq \varepsilon$, $\left|\sum c_i e_i\right| \leq \sum |c_i|\varepsilon = \varepsilon \sum c_i = 2\varepsilon$. Se usa (a) para escribir $|c_i| = c_i$ y (b) para sumar. Es la misma estabilidad del Problema 3, y se debe a que todos los pesos son positivos. □

Problema 5

1.0 PUNTO

Considere $I = \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$.

a. Con el cambio $t = 1/x$, transforme I en una integral sobre $[0,1]$. ¿Tiene singularidad la nueva integral? Justifique por qué se le puede aplicar Simpson compuesta con su término de error usual.

b. Aproxime I con Simpson compuesta con $n = 4$, usando la tabla.

t	0	0.25	0.5	0.75	1
$\phi(t) = \dfrac{t^2}{t^4+1}$	0	$\dfrac{16}{257}$	$\dfrac{4}{17}$	$\dfrac{144}{337}$	$\dfrac{1}{2}$
$\phi(t) \approx$	0	0.0622568	0.2352941	0.4272997	0.5

SOLUCIÓN. **(a)** Con $x = t^{-1}$, $\mathrm{d}x = -t^{-2}\,\mathrm{d}t$; $x = 1 \leftrightarrow t = 1$ y $x \to \infty \leftrightarrow t \to 0^+$:

$$I = \int_1^0 \frac{-t^{-2}}{1+t^{-4}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{-2}}{1+t^{-4}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^2}{t^4+1}\,\mathrm{d}t,$$

multiplicando numerador y denominador por t^4. El integrando $\phi(t) = \frac{t^2}{t^4+1}$ es un cociente de polinomios con denominador ≥ 1 en $[0,1]$. Por tanto es $C^\infty[0,1]$ (en particular C^4) y **no hay singularidad**, así que vale el teorema de Simpson compuesta.

(b) Con $h = 0.25$:

$$\begin{aligned} S_4 &= \frac{0.25}{3}\big[\phi(0) + 4\phi(0.25) + 2\phi(0.5) + 4\phi(0.75) + \phi(1)\big] \\ &= \frac{1}{12}\big[0 + 0.2490272 + 0.4705882 + 1.7091988 + 0.5\big] = \frac{2.9288142}{12} = 0.2440679. \end{aligned}$$

□

Problema bonus · opcional

El siguiente problema es opcional y está relacionado con el Problema 2. Vale 1.0 punto adicional, sin que la nota del parcial supere 5.0.

Bonus

+1.0 punto

Sea $n \geq 2$, $h = \frac{2\pi}{n}$ y $x_j = jh$. Para una función f continua y 2π-periódica, la regla del trapecio compuesta en $[0, 2\pi]$ se reduce a $T_n(f) = h\sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)$, porque $f(2\pi) = f(0)$.

a. Sea k un entero con $1 \leq k \leq n-1$. Usando la suma geométrica de $\omega = e^{ikh}$, demuestre que $\sum_{j=0}^{n-1} \cos(kx_j) = 0$. Concluya que $T_n(\cos kx) = \int_0^{2\pi} \cos kx \, \mathrm{d}x$.

b. Sin buscar primitivas, calcule $\int_0^{2\pi} \cos^2 x \, \mathrm{d}x$ usando T_3.

Solución. **(a)** Sea $\omega = e^{ikh} = e^{2\pi ik/n}$. Como $0 < \frac{2\pi k}{n} < 2\pi$, se tiene $\omega \neq 1$, y además $\omega^n = e^{2\pi ik} = 1$. Por la suma geométrica,

$$\sum_{j=0}^{n-1} e^{ikx_j} = \sum_{j=0}^{n-1} \omega^j = \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1} = 0.$$

Tomando la parte real (fórmula de Euler), $\sum_{j=0}^{n-1} \cos(kx_j) = 0$. Luego $T_n(\cos kx) = 0 = \int_0^{2\pi} \cos kx \, \mathrm{d}x$.

(b) $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$. Por (a) con $n = 3$ y $k = 2$, $T_3(\cos 2x) = \int_0^{2\pi} \cos 2x \, \mathrm{d}x$, y T_3 es exacta para constantes ($T_3(1) = 3h = 2\pi$). Por linealidad, T_3 integra $\cos^2 x$ exactamente. Los nodos son $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$, donde $\cos^2$ vale $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 x \, \mathrm{d}x = T_3(\cos^2 x) = \frac{2\pi}{3}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{3}{2} = \pi.$$

□

Fin del parcial