UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Instituto de Matemáticas

Análisis Numérico

Supletorio Parcial 1 | 2026–02

Clave de respuestas

Santiago Alzate

Nombre _____ Documento _____

Indicaciones. Tiempo máximo: 120 minutos. Los cinco problemas valen lo mismo (5 puntos en total); el bonus es opcional y vale 1.0 punto adicional, sin superar 5.0. Resuelva mostrando todos los detalles que lo llevan a la solución; no se responden preguntas.

Problema	1	2	3	4	5	Bonus	Total
Máximo	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	+1.0	5
Obtenido							

Problema 1

1.0 punto

Determine un intervalo $[a, b]$ en el cual la iteración de punto fijo es convergente para

$$x = g(x) = \frac{2 - e^x + x^2}{3}.$$

Además, estime el número de iteraciones necesario para obtener una precisión de al menos 10^{-5}.

Solución. Tomamos $[a, b] = [0, 1]$ y verificamos las dos hipótesis del teorema de punto fijo.

(i) g aplica $[0, 1]$ en sí mismo. Derivando,

$$g'(x) = \frac{2x - e^x}{3}.$$

La función $\varphi(x) = e^x - 2x$ cumple $\varphi'(x) = e^x - 2 = 0$ sólo en $x = \ln 2$, y allí $\varphi(\ln 2) = 2 - 2\ln 2 \approx 0{,}6137 > 0$; como ése es su mínimo global, $e^x > 2x$ para todo x. Por tanto $g'(x) < 0$ en todo $\mathbb{R}$ y g es *estrictamente decreciente*. En consecuencia,

$$g([0, 1]) = [g(1),\, g(0)] = \left[\tfrac{3-e}{3},\, \tfrac{1}{3}\right] \approx [0{,}0939,\, 0{,}3333] \subset [0, 1].$$

(ii) Cota de la derivada. Para $x \in [0, 1]$,

$$|g'(x)| = \frac{e^x - 2x}{3} = \frac{\varphi(x)}{3}.$$

Como φ decrece en $[0, \ln 2]$ y crece en $[\ln 2, 1]$, su máximo sobre $[0, 1]$ está en un extremo: $\varphi(0) = 1$ y $\varphi(1) = e - 2 \approx 0{,}7183$. Luego

$$|g'(x)| \le \frac{1}{3} =: k < 1 \qquad \text{para todo } x \in [0, 1].$$

Por el teorema de punto fijo, g tiene un *único* punto fijo p en $[0,1]$ y la iteración $p_n = g(p_{n-1})$ converge a p para cualquier $p_0 \in [0,1]$. Numéricamente $p \approx 0{,}25753$.

Número de iteraciones. El corolario del teorema da

$$|p_n - p| \;\le\; k^n \max\{p_0 - a,\; b - p_0\} \;\le\; \left(\tfrac{1}{3}\right)^n (b-a) = \left(\tfrac{1}{3}\right)^n.$$

Exigir $\left(\frac{1}{3}\right)^n \le 10^{-5}$ equivale a

$$n \;\ge\; \frac{5\ln 10}{\ln 3} \;\approx\; 10{,}48,$$

es decir $\boxed{n = 11}$ iteraciones; en efecto $(1/3)^{11} \approx 5{,}6 \times 10^{-6}$ mientras que $(1/3)^{10} \approx 1{,}7 \times 10^{-5}$.

Con la cota más fina $|p_n - p| \le \dfrac{k^n}{1-k}|p_1 - p_0|$ y $p_0 = 0$ (de modo que $|p_1 - p_0| = \frac{1}{3}$) queda $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n \le 10^{-5}$, o sea $n = 10$. El error real en la iteración 10 es $\approx 4 \times 10^{-7}$: las cotas son conservadoras.

Problema 2

1.0 PUNTO

Probar que

$$\sum_{k=0}^{n} q(x_k)\, L_{n,k}(x) = q(x) \qquad \forall\, q \in \Pi_n,$$

y además que

$$\sum_{k=0}^{n} x_k^{\ell}\, L_{n,k}(x) = x^{\ell} \qquad \text{para todo entero no negativo } \ell \le n,$$

donde $L_{n,k}$ se define como de costumbre a partir de los nodos distintos $x_0, \ldots, x_n$.

SOLUCIÓN. Recordemos que

$$L_{n,k}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \ne k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}, \qquad \text{de donde} \qquad L_{n,k}(x_i) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \ne k, \end{cases}$$

y que $\deg L_{n,k} = n$.

Sea $q \in \Pi_n$ y pongamos $P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q(x_k) L_{n,k}(x)$.

Paso 1: P interpola a q en los nodos. Para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$,

$$P(x_i) = \sum_{k=0}^{n} q(x_k) L_{n,k}(x_i) = \sum_{k=0}^{n} q(x_k)\delta_{ik} = q(x_i).$$

Paso 2: la diferencia es el polinomio nulo. Sea $r = q - P$. Como $\deg q \le n$ y $\deg P \le n$, se tiene $\deg r \le n$. Por el Paso 1, r se anula en los $n+1$ nodos *distintos* $x_0, \ldots, x_n$. Un polinomio no nulo de grado $\le n$ tiene a lo sumo n raíces; como r tiene $n+1$, forzosamente $r \equiv 0$, es decir

$$\sum_{k=0}^{n} q(x_k) L_{n,k}(x) = q(x) \qquad \text{para todo } x.$$

(Equivalentemente: es la unicidad del polinomio de interpolación aplicada al caso en que la función interpolada ya es un polinomio de grado $\le n$, cuyo interpolante es ella misma.)

Segunda parte. Si $0 \le \ell \le n$, entonces $q(x) = x^\ell$ es un polinomio de grado $\ell \le n$, luego $q \in \Pi_n$. Aplicando lo anterior con $q(x_k) = x_k^\ell$,

$$\sum_{k=0}^{n} x_k^\ell \, L_{n,k}(x) = x^\ell.$$

En particular, con $\ell = 0$ se obtiene la *partición de la unidad* $\sum_{k=0}^{n} L_{n,k}(x) = 1$, y con $\ell = 1$, $\sum_{k=0}^{n} x_k L_{n,k}(x) = x$.

Problema 3

1.0 PUNTO

Suponga que g es continuamente diferenciable en algún intervalo (c, d) que contiene al punto fijo p de g. Muestre que si $|g'(p)| < 1$, entonces existe un $\delta > 0$ tal que si $|p_0 - p| \le \delta$, entonces la iteración de punto fijo converge.

SOLUCIÓN. **Paso 1: elegir k y δ.** Como $|g'(p)| < 1$, escojamos k con

$$|g'(p)| < k < 1, \qquad \text{por ejemplo} \qquad k = \tfrac{1}{2}\big(|g'(p)| + 1\big).$$

La derivada g' es continua en (c, d), luego $|g'|$ también. Aplicando la definición de continuidad en p con $\varepsilon = k - |g'(p)| > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$[p - \delta,\ p + \delta] \subset (c, d) \qquad \text{y} \qquad |g'(x)| \le k \quad \text{para todo } x \in I_\delta := [p - \delta,\ p + \delta].$$

Paso 2: g aplica I_δ en sí mismo. Sea $x \in I_\delta$. Como $g(p) = p$, el teorema del valor medio da un ξ entre x y p —luego $\xi \in I_\delta$— con

$$|g(x) - p| = |g(x) - g(p)| = |g'(\xi)|\,|x - p| \ \le\ k\,|x - p| \ \le\ k\,\delta \ \le\ \delta,$$

es decir $g(x) \in I_\delta$.

Paso 3: convergencia. g es continua en I_δ, $g(I_\delta) \subseteq I_\delta$ y $|g'| \le k < 1$ allí: son las hipótesis del teorema de punto fijo. Por tanto, para cualquier p_0 con $|p_0 - p| \le \delta$, la sucesión $p_n = g(p_{n-1})$ está bien definida, permanece en I_δ y converge al único punto fijo de g en I_δ, que es p. Iterando la desigualdad del Paso 2,

$$|p_n - p| \le k\,|p_{n-1} - p| \le \cdots \le k^n |p_0 - p| \le k^n \delta \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Problema 4

1.0 PUNTO

Sea A una constante positiva dada y $g(x) = 2x - Ax^2$. Muestre que si la iteración de punto fijo converge a un límite no nulo, entonces el límite es $p = 1/A$; por lo que el inverso de un número se puede encontrar utilizando únicamente multiplicaciones y restas.

SOLUCIÓN. Sea $p_{n+1} = g(p_n) = 2p_n - Ap_n^2$ y supongamos que $p_n \to p$ con $p \neq 0$.

Paso 1: el límite es un punto fijo. g es un polinomio, luego continua; tomando límite en la recurrencia,

$$p = \lim_{n\to\infty} p_{n+1} = \lim_{n\to\infty} g(p_n) = g\Big(\lim_{n\to\infty} p_n\Big) = g(p).$$

Paso 2: resolver $p = g(p)$. La ecuación $p = 2p - Ap^2$ equivale a

$$Ap^2 - p = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad p\,(Ap - 1) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad p = 0 \ \text{ o } \ p = \frac{1}{A}.$$

Como por hipótesis $p \neq 0$, necesariamente $\boxed{p = 1/A}$.

Interpretación. La iteración $p_{n+1} = p_n(2 - Ap_n)$ sólo usa dos multiplicaciones y una resta y converge a $1/A$: permite calcular un recíproco sin dividir. (Es la iteración de Newton aplicada a $f(x) = \frac{1}{x} - A$.)

Cuándo converge. Con $e_n = 1 - Ap_n$ se obtiene

$$e_{n+1} = 1 - A\big(2p_n - Ap_n^2\big) = (1 - Ap_n)^2 = e_n^2,$$

luego $e_n = e_0^{2^n}$. Así, $p_n \to 1/A$ —y cuadráticamente— si y sólo si $|1 - Ap_0| < 1$, esto es, $0 < p_0 < 2/A$.

Problema 5

1.0 PUNTO

Probar que:

(i) **(0.5)** Si $g \in C[a,b]$ y $g(x) \in [a,b]$ para todo $x \in [a,b]$, entonces g tiene al menos un punto fijo en $[a,b]$.

(ii) **(0.5)** Si, además, g' existe en (a,b) y hay una constante positiva $k < 1$ con $|g'(x)| \leq k$ para todo $x \in (a,b)$, entonces existe exactamente un punto fijo en $[a,b]$.

SOLUCIÓN. **(i) Existencia.** Si $g(a) = a$ o $g(b) = b$, ya hay un punto fijo y no hay nada que probar. Supongamos entonces $g(a) \neq a$ y $g(b) \neq b$. Como $g(x) \in [a,b]$ para todo $x \in [a,b]$, en particular $g(a) \geq a$ y $g(b) \leq b$, de modo que con la suposición anterior

$$g(a) > a \qquad \text{y} \qquad g(b) < b.$$

Sea $h(x) = g(x) - x$, continua en $[a,b]$ por ser diferencia de funciones continuas. Entonces

$$h(a) = g(a) - a > 0, \qquad h(b) = g(b) - b < 0,$$

y el teorema del valor intermedio da un $p \in (a,b)$ con $h(p) = 0$, es decir $g(p) = p$.

(ii) Unicidad. Supongamos, por reducción al absurdo, que hay dos puntos fijos distintos $p \neq q$ en $[a,b]$. Como g es continua en el intervalo cerrado de extremos p y q y derivable en su interior —contenido en (a,b)—, el teorema del valor medio da un ξ estrictamente entre p y q con

$$g(p) - g(q) = g'(\xi)\,(p - q).$$

Usando $g(p) = p$, $g(q) = q$ y tomando valor absoluto,

$$|p - q| = |g(p) - g(q)| = |g'(\xi)|\,|p - q| \;\leq\; k\,|p - q| \;<\; |p - q|,$$

donde la última desigualdad es estricta porque $k < 1$ y $|p - q| > 0$. Esto es una contradicción, luego el punto fijo es único; junto con (i), existe *exactamente* uno en $[a,b]$. ■

Problema bonus

+1.0 PUNTO

Presentar un ejemplo de función con único punto fijo en un intervalo $[a,b]$, pero tal que la existencia y la unicidad *no* se puedan deducir a partir del teorema de punto fijo.

SOLUCIÓN. Tomemos

$$g(x) = e^x - 1 \qquad \text{en} \qquad [a,b] = [-1,1].$$

Tiene exactamente un punto fijo. Sea $\varphi(x) = g(x) - x = e^x - 1 - x$. Entonces $\varphi'(x) = e^x - 1$, que se anula sólo en $x = 0$, es negativa para $x < 0$ y positiva para $x > 0$; luego φ alcanza en

$x = 0$ su mínimo global, con $\varphi(0) = 0$. Por tanto $\varphi(x) > 0$ para todo $x \neq 0$, y la única solución de $g(x) = x$ en todo $\mathbb{R}$ —en particular en $[-1, 1]$— es

$$p = 0.$$

Pero el teorema no es aplicable. Fallan *las dos* hipótesis:

(a) g no aplica $[-1, 1]$ en sí mismo: $g(1) = e - 1 \approx 1{,}7183 > 1$.

(b) La derivada no está acotada por una constante $k < 1$: $g'(x) = e^x$, de modo que $\max_{[-1,1]} |g'| = e \approx 2{,}7183$; e incluso en el propio punto fijo $|g'(0)| = 1$, así que ningún subintervalo de $[-1, 1]$ que contenga a p arregla el problema.

La existencia y la unicidad son ciertas, pero el teorema no las detecta: sus hipótesis son *suficientes*, no necesarias.

Variante clásica (sólo falla la unicidad). Si se quiere un ejemplo en el que la existencia sí se deduzca del teorema pero la unicidad no, sirve

$$g(x) = 3^{-x} \qquad \text{en } [0, 1].$$

Aquí g es continua y decreciente con $g([0, 1]) = [\frac{1}{3}, 1] \subset [0, 1]$, así que (i) da la existencia; en cambio $|g'(x)| = (\ln 3)\, 3^{-x}$ y $|g'(0)| = \ln 3 \approx 1{,}0986 > 1$, de modo que (ii) no se puede aplicar. El punto fijo es único de todos modos, porque g es estrictamente decreciente y entonces $g(x) - x$ lo es también, luego se anula a lo sumo una vez.