UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Instituto de Matemáticas

Análisis Numérico

Supletorio | 2026–02

Clave de respuestas

Santiago Alzate

Nombre _____ Documento _____

> Indicaciones. Tiempo máximo: 120 minutos. Los cinco problemas valen lo mismo (5 puntos en total); el bonus es opcional y vale 1.0 punto adicional, sin superar 5.0. No se permite calculadora. Justifique todos los procedimientos; no se responden preguntas.

Problema	1	2	3	4	5	Bonus	Total
Máximo	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	+1.0	5
Obtenido							

Problema 1

1.0 punto

Suponga que los valores de f se conocen con errores de redondeo: $\tilde{f}(x) = f(x) - e(x)$ con $|e(x)| \le \varepsilon$, y que $|f'''| \le M$. Recuerde la fórmula de tres puntos en un extremo: si $f \in C^3$, existe ξ entre x_0 y $x_0 + 2h$ con

$$f'(x_0) = \frac{-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)}{2h} + \frac{h^2}{3} f'''(\xi).$$

a. Demuestre que

$$\left| f'(x_0) - \frac{-3\tilde{f}(x_0) + 4\tilde{f}(x_0+h) - \tilde{f}(x_0+2h)}{2h} \right| \le \frac{4\varepsilon}{h} + \frac{h^2}{3} M.$$

b. Halle el $h > 0$ que minimiza la cota y justifique que es un mínimo.

Solución. **(a)** Escribiendo $f = \tilde{f} + e$ en el cociente de la fórmula,

$$f'(x_0) - \frac{-3\tilde{f}(x_0) + 4\tilde{f}(x_0+h) - \tilde{f}(x_0+2h)}{2h} = \frac{-3e(x_0) + 4e(x_0+h) - e(x_0+2h)}{2h} + \frac{h^2}{3} f'''(\xi).$$

Por la desigualdad triangular, $|-3e(x_0) + 4e(x_0+h) - e(x_0+2h)| \le 3\varepsilon + 4\varepsilon + \varepsilon = 8\varepsilon$, así que el primer término está acotado por $\frac{8\varepsilon}{2h} = \frac{4\varepsilon}{h}$. Como $|f'''(\xi)| \le M$, el segundo está acotado por $\frac{h^2}{3}M$.

(b) Sea $E(h) = 4\varepsilon h^{-1} + \frac{M}{3}h^2$. Entonces $E'(h) = -4\varepsilon h^{-2} + \frac{2M}{3}h = 0 \iff h^3 = \frac{6\varepsilon}{M}$, es decir, $h_{\text{ópt}} = \left(\frac{6\varepsilon}{M}\right)^{1/3}$. Es un mínimo porque $E''(h) = 8\varepsilon h^{-3} + \frac{2M}{3} > 0$ para todo $h > 0$. (También: $E \to \infty$ cuando $h \to 0^+$ y cuando $h \to \infty$, y $h_{\text{ópt}}$ es el único punto crítico.) □

Problema 2

1.0 PUNTO

Sean $f \in C^2[a,b]$, n **par**, $h = \frac{b-a}{n+2}$ y $x_j = a + (j+1)h$ para $j = -1, 0, 1, \ldots, n+1$ (así $x_{-1} = a$ y $x_{n+1} = b$). Demuestre que existe $\mu \in (a,b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 2h \sum_{j=0}^{n/2} f(x_{2j}) + \frac{b-a}{6} h^2 f''(\mu).$$

Puede usar la regla del punto medio simple: $\int_{x_{-1}}^{x_1} f\,\mathrm{d}x = 2hf(x_0) + \frac{h^3}{3} f''(\xi)$ con $\xi \in (x_{-1}, x_1)$. Incluya un dibujo de la partición que muestre cómo se agrupan los subintervalos.

SOLUCIÓN. *Paso 1: contar los nodos.* Hay $n+3$ nodos $x_{-1}, x_0, \ldots, x_{n+1}$ con paso h, así que $[a,b]$ queda dividido en $n+2$ subintervalos pequeños. Como n es par, $n+2$ también lo es, y se pueden agrupar de dos en dos en $\frac{n}{2}+1$ bloques de longitud $2h$.

Paso 2: la partición. Los bloques son $B_j = [x_{2j-1}, x_{2j+1}]$, $j = 0, 1, \ldots, \frac{n}{2}$. El centro de B_j es x_{2j}, de índice par (Figura 1). El primer bloque empieza en $x_{-1} = a$ y el último termina en $x_{n+1} = b$; los bloques no se solapan y cubren $[a,b]$.

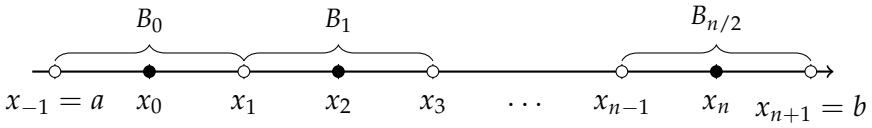


Figura 1: Negro: nodos de índice par, centros de los bloques y únicos puntos donde se evalúa f. Blanco: nodos que solo delimitan los bloques.

Paso 3: punto medio simple en cada bloque. Por aditividad y la regla del punto medio en B_j (centro x_{2j}, semiancho h), existe $\xi_j \in B_j$ con

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{n/2} \int_{x_{2j-1}}^{x_{2j+1}} f\,\mathrm{d}x = 2h \sum_{j=0}^{n/2} f(x_{2j}) + \frac{h^3}{3} \sum_{j=0}^{n/2} f''(\xi_j).$$

A diferencia del trapecio, ningún nodo evaluado se comparte entre bloques.

Paso 4: sumar los errores. Por el resultado de promedios con $\frac{n}{2}+1$ términos, existe $\mu \in (a,b)$ con $\sum_{j=0}^{n/2} f''(\xi_j) = \frac{n+2}{2} f''(\mu)$. Entonces

$$\frac{h^3}{3} \cdot \frac{n+2}{2} f''(\mu) = \frac{h^2}{6}\big[(n+2)h\big] f''(\mu) = \frac{b-a}{6} h^2 f''(\mu),$$

porque $(n+2)h = b-a$. □

Problema 3

1.0 PUNTO

Sean n par, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_j = a + jh$, y la regla de Simpson compuesta

$$S_n(f) = \frac{h}{3}\Big[f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{n/2-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(x_n)\Big].$$

Suponga que cada valor $f(x_j)$ se reemplaza por $\tilde{f}(x_j)$ con $|f(x_j) - \tilde{f}(x_j)| \le \varepsilon$. Demuestre que el error de redondeo acumulado, $|S_n(f) - S_n(\tilde{f})|$, es a lo sumo $(b-a)\varepsilon$, independiente de n.

SOLUCIÓN. Sea $e_j = f(x_j) - \tilde{f}(x_j)$, con $|e_j| \le \varepsilon$. Por linealidad, $S_n(f) - S_n(\tilde{f}) = S_n(e)$, y por la desigualdad triangular,

$$|S_n(e)| \le \frac{h}{3}\Big[\varepsilon + 2\Big(\frac{n}{2} - 1\Big)\varepsilon + 4 \cdot \frac{n}{2}\,\varepsilon + \varepsilon\Big] = \frac{h}{3}\big[2 + (n-2) + 2n\big]\varepsilon = \frac{h}{3} \cdot 3n\varepsilon = nh\varepsilon = (b-a)\varepsilon,$$

porque hay $\frac{n}{2} - 1$ nodos pares interiores, $\frac{n}{2}$ nodos impares y $nh = b - a$. La cota no crece al refinar: la regla es **estable**. □

Problema 4

1.0 PUNTO

El polinomio de Legendre mónico de grado 2 es $P_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$. Sean $x_1 < x_2$ sus raíces, L_1, L_2 los polinomios de Lagrange en esos nodos y $c_i = \int_{-1}^{1} L_i(x)\,\mathrm{d}x$.

a. Halle x_1, x_2, c_1, c_2.

b. Verifique directamente que la regla $c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$ integra exactamente x^3 en $[-1, 1]$, pero no x^4.

c. Demuestre que, en general, ninguna regla $\sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$ con n nodos distintos en $[-1, 1]$ (y pesos cualesquiera) puede integrar exactamente todos los polinomios de grado $2n$.

SOLUCIÓN. **(a)** $x^2 - \frac{1}{3} = 0 \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, así que $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Además $L_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$, con $x_1 - x_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, luego

$$c_1 = \frac{1}{x_1 - x_2}\int_{-1}^{1}(x - x_2)\,\mathrm{d}x = \frac{-2x_2}{x_1 - x_2} = \frac{-2/\sqrt{3}}{-2/\sqrt{3}} = 1,$$

y por simetría (o porque $c_1 + c_2 = \int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}x = 2$), $c_2 = 1$.

(b) Para x^3: $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = 0 = \int_{-1}^{1} x^3\,\mathrm{d}x$. Para x^4: $2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$, pero $\int_{-1}^{1} x^4\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5} \neq \frac{2}{9}$.

(c) Sea $p(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)^2$, de grado $2n$. Es continua, $p \geq 0$ y no es idénticamente nula, así que $\int_{-1}^{1} p\,\mathrm{d}x > 0$. En cambio, $\sum_i c_i p(x_i) = \sum_i c_i \cdot 0 = 0$. Luego la regla no es exacta para p. □

Problema 5

1.0 PUNTO

Considere $I = \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2(1+x^2)}$.

a. Con el cambio $t = 1/x$, transforme I en una integral sobre $[0,1]$. ¿Tiene singularidad la nueva integral? Justifique por qué se le puede aplicar Simpson compuesta con su término de error usual.

b. Aproxime I con Simpson compuesta con $n = 4$, usando la tabla.

t	0	0.25	0.5	0.75	1
$\phi(t) = \dfrac{t^2}{1+t^2}$	0	$\dfrac{1}{17}$	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{9}{25}$	$\dfrac{1}{2}$
$\phi(t) \approx$	0	0.0588235	0.2	0.36	0.5

SOLUCIÓN. **(a)** Con $x = t^{-1}$, $\mathrm{d}x = -t^{-2}\,\mathrm{d}t$; $x = 1 \leftrightarrow t = 1$ y $x \to \infty \leftrightarrow t \to 0^+$:

$$I = \int_1^0 \frac{-t^{-2}}{t^{-2}(1+t^{-2})}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{1+t^{-2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,$$

multiplicando numerador y denominador por t^2. El integrando $\phi(t) = \frac{t^2}{1+t^2}$ es un cociente de polinomios con denominador ≥ 1 en $[0,1]$. Por tanto es $C^\infty[0,1]$ (en particular C^4) y **no hay singularidad**, así que vale el teorema de Simpson compuesta.

(b) Con $h = 0.25$:

$$\begin{aligned} S_4 &= \frac{0.25}{3}\big[\phi(0) + 4\phi(0.25) + 2\phi(0.5) + 4\phi(0.75) + \phi(1)\big] \\ &= \frac{1}{12}\big[0 + 0.2352941 + 0.4 + 1.44 + 0.5\big] = \frac{2.5752941}{12} = 0.2146078. \end{aligned}$$

(Como verificación: $I = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0.2146018$, así que el error es $\approx 6 \times 10^{-6}$.) □

Problema bonus · opcional

El siguiente problema es opcional y relaciona las reglas del trapecio y de Simpson compuestas. Vale 1.0 punto adicional, sin que la nota del supletorio supere 5.0.

Bonus

+1.0 punto

Sea f continua en $[a,b]$, $n \geq 1$ y $h = \frac{b-a}{n}$. Denote por T_m la regla del trapecio compuesta con m subintervalos y por S_{2n} la regla de Simpson compuesta con $2n$ subintervalos (paso $\frac{h}{2}$).

a. Demuestre que $S_{2n} = \dfrac{4T_{2n} - T_n}{3}$.

b. Verifique la identidad para $f(x) = x^2$ en $[0,1]$ con $n = 1$.

Solución. **(a)** Sean $y_k = a + k\frac{h}{2}$, $k = 0, \ldots, 2n$, y $f_k = f(y_k)$. Los nodos de T_n son los y_k con k par. Entonces

$$T_{2n} = \frac{h}{4}\Big[f_0 + 2\sum_{k=1}^{2n-1} f_k + f_{2n}\Big], \qquad T_n = \frac{h}{2}\Big[f_0 + 2\sum_{k \text{ par}, 0<k<2n} f_k + f_{2n}\Big].$$

Luego

$$4T_{2n} - T_n = \frac{h}{2}\Big[f_0 + 4\sum_{k=1}^{2n-1} f_k - 2\sum_{k \text{ par}} f_k + f_{2n}\Big] = \frac{h}{2}\Big[f_0 + 4\sum_{k \text{ impar}} f_k + 2\sum_{k \text{ par}} f_k + f_{2n}\Big],$$

donde las sumas recorren los índices interiores. Al dividir entre 3 se obtiene $\frac{h/2}{3}\big[f_0 + 4\sum_{\text{impar}} f_k + 2\sum_{\text{par}} f_k + f_{2n}\big] = S_{2n}$.

(b) $T_1 = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}$ y $T_2 = \frac{1}{4}\big(0 + 2\cdot\frac{1}{4} + 1\big) = \frac{3}{8}$, así que $\frac{4T_2 - T_1}{3} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{3}$. Por otro lado, $S_2 = \frac{1/2}{3}\big(0 + 4\cdot\frac{1}{4} + 1\big) = \frac{1}{3} = \int_0^1 x^2\,dx$. □

Fin del supletorio