UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

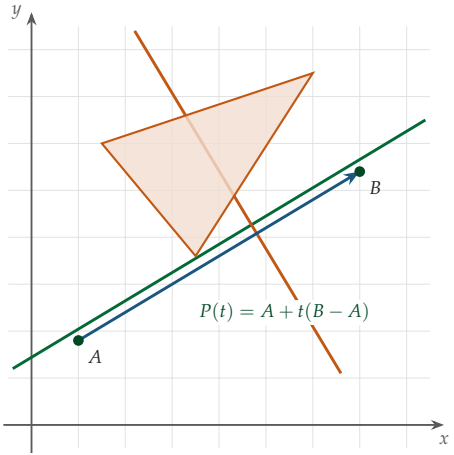
Instituto de Matemáticas
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Geometría Básica · Capítulo 3

Geometría Analítica

Coordenadas, segmentos, rectas y planos en el plano y en el espacio

Temas 3.1 – 3.28 del contenido detallado



Santiago Alzate Suárez
Semestre 2026-2

Hoja de ruta

3.1–3.5 La recta real y el plano cartesiano: orientación, medida, coordenadas, diagonal, contradiagonal y rotación de $90°$.

3.6–3.8 Segmentos: parametrización, punto medio, traslado paralelo y criterio de paralelismo.

3.9–3.14 Rectas paramétricas: distancia, intersección, paralela y perpendicular por un punto, mediatriz, perpendicularidad y ángulo.

3.15–3.19 Ecuaciones de la recta: pendiente, forma simétrica, ecuación general, criterios, distancias y área del triángulo.

3.20–3.27 El espacio: coordenadas, distancia, rectas y sus posiciones relativas.

3.28 Planos en el espacio.

La idea del capítulo. Traducir la geometría a números: cada punto será un par (o una terna) de números, cada recta una ecuación, y los teoremas de la geometría sintética (Pitágoras, Thales, paralelogramos, congruencia) se convierten en **cálculos**.

Notación. Para $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$ escribimos $B - A = (b_1 - a_1,\, b_2 - a_2)$ y $A + t(B - A)$ para el punto $\big(a_1 + t(b_1 - a_1),\, a_2 + t(b_2 - a_2)\big)$.

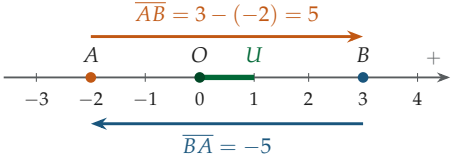
3.1–3.5

La recta y el plano cartesiano

Orientación de la recta, patrón de medida, sistema de coordenadas, diagonal, contradiagonal y rotación de 90°.

Definición. Una **recta orientada** es una recta en la que se elige un punto O (**origen**) y uno de sus dos sentidos como **positivo**. Fijando además un segmento **unidad** $\overline{OU}$, a cada punto P le corresponde un único número real x_P, su **abscisa**, y recíprocamente (postulado de la regla).

- $x_P > 0$ si P está en la semirrecta positiva, $x_P < 0$ si está en la negativa.
- **Distancia**: $d(A, B) = |b - a|$.
- **Medida algebraica** (segmento dirigido): $\overline{AB} = b - a$; su signo indica el sentido de A hacia B.



Teorema 1 (Chasles y punto medio)

Para tres puntos cualesquiera de una recta orientada,

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC},$$

y el punto medio de $\overline{AB}$ tiene abscisa $m = \dfrac{a+b}{2}$.

Chasles y punto medio: demostración

Prueba.

1. **Chasles.** Con abscisas a, b, c:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = (b-a) + (c-b) = c - a = \overline{AC}.$$

   No importa el orden de los puntos sobre la recta: el signo se encarga de los casos.

2. **Punto medio.** M es punto medio de $\overline{AB}$ si $\overline{AM} = \overline{MB}$ (mismo sentido y misma longitud). Si M tiene abscisa m:

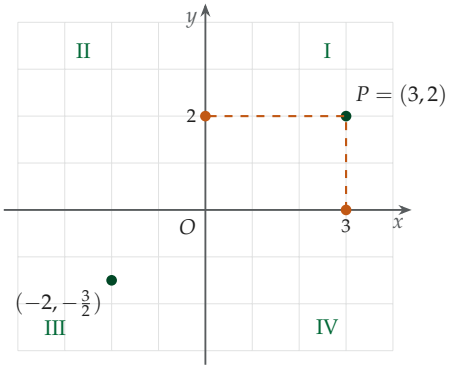
$$m - a = b - m \iff 2m = a + b \iff m = \frac{a+b}{2}.$$

3. **Comprobación.** $d(A,M) = \left|\frac{a+b}{2} - a\right| = \frac{|b-a|}{2} = \frac{1}{2}d(A,B)$. ■

Ejemplo. Si $A = -2$ y $B = 3$: $d(A,B) = 5$, $\overline{AB} = 5$, $\overline{BA} = -5$ y el punto medio es $\frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}$.

Definición. Un **sistema de coordenadas cartesianas** está formado por dos rectas orientadas perpendiculares (**ejes** x e y) que se cortan en su origen común O, con la misma unidad. El eje y se obtiene girando el eje x $90°$ en sentido antihorario.

- x es la **abscisa** y y la **ordenada** de P.
- Los puntos del eje x son $(x, 0)$ y los del eje y, $(0, y)$.
- Signos por cuadrante: I $(+,+)$, II $(-,+)$, III $(-,-)$, IV $(+,-)$.



Los ejes dividen el plano en cuatro cuadrantes.

Teorema 2

Existe una correspondencia biunívoca entre los puntos del plano y los pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

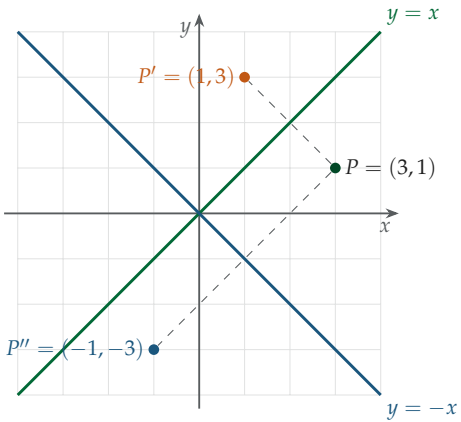
Prueba.

1. **De punto a par.** Por P trazamos la perpendicular a cada eje; es única (2.2.9). Sus pies tienen abscisas x (en el eje x) e y (en el eje y), únicas por el postulado de la regla. A P le asociamos (x, y).
2. **De par a punto.** Dado (x, y), sean X e Y los puntos de abscisas x e y en los ejes. Las perpendiculares a los ejes por X y por Y no son paralelas (los ejes no lo son), así que se cortan en un único punto P.
3. **Biyección.** Ambas construcciones son inversas una de la otra: a P le corresponde (x, y) y a (x, y) le corresponde P. ■

Definición. La **diagonal** es la recta $y = x$: bisectriz de los cuadrantes I y III. La **contradiagonal** es la recta $y = -x$: bisectriz de los cuadrantes II y IV.

Teorema 3 (reflexiones)

El simétrico de $P = (a, b)$ respecto a la diagonal es $P' = (b, a)$; respecto a la contradiagonal es $P'' = (-b, -a)$.



La diagonal es la mediatriz de $\overline{PP'}$.

Prueba.

1. La reflexión en una recta conserva distancias y ángulos.
2. La diagonal es la **bisectriz** del ángulo recto xOy; por la caracterización de la bisectriz (2.2.16), la reflexión en ella lleva la semirrecta positiva del eje x a la semirrecta positiva del eje y, y viceversa.
3. Sea $Q = (a, 0)$ el pie de la perpendicular de P al eje x. Su imagen Q' está en el eje y a la misma distancia dirigida: $Q' = (0, a)$, y $\overline{Q'P'}$ es perpendicular al eje y. Luego la ordenada de P' es a.
4. Del mismo modo, el pie $(0, b)$ de la perpendicular al eje y va a $(b, 0)$: la abscisa de P' es b. Así $P' = (b, a)$.
5. La contradiagonal lleva el eje x positivo al eje y *negativo*; el mismo razonamiento da $P'' = (-b, -a)$. ■

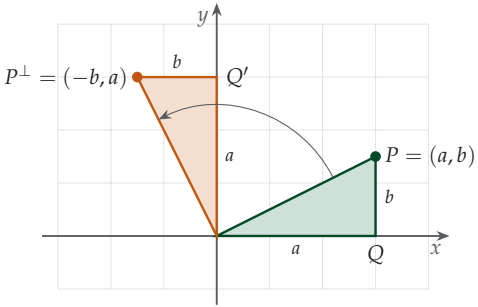
Teorema 4 (rotación de 90°)

Al girar $P = (a, b)$ un ángulo de 90° en sentido antihorario alrededor de O se obtiene

$$P^{\perp} = (-b, a).$$

Prueba. (Caso $a, b > 0$; los demás son análogos.) Sea $Q = (a, 0)$, de modo que $\triangle OQP$ es rectángulo en Q con $OQ = a$ y $QP = b$.

1. El giro lleva el eje x positivo al eje y positivo: Q va a $Q' = (0, a)$.
2. El giro conserva ángulos y longitudes: $\overline{Q'P^{\perp}} \perp \overline{OQ'}$, $Q'P^{\perp} = b$, y apunta hacia la izquierda (hacia donde gira «arriba»).
3. Por tanto $P^{\perp} = (-b, a)$, y $\triangle OQP \cong \triangle OQ'P^{\perp}$ (**L-A-L**). ■



Ejemplos y consecuencias

Ejemplo. Para $P = (3, 1)$:

- reflexión en la diagonal: $(1, 3)$;
- reflexión en la contradiagonal: $(-1, -3)$;
- giro antihorario de $90°$: $(-1, 3)$;
- dos giros $(180°)$: $(-3, -1)$;
- giro horario de $90°$: $(1, -3)$.

Por qué importa la rotación. Si un segmento va de O a (u_1, u_2), el segmento de O a $(-u_2, u_1)$ es **perpendicular** a él y tiene la **misma longitud**. Esta idea sencilla nos dará, más adelante, la recta perpendicular, la mediatriz y la ecuación general de la recta.

Observación. Dos giros de $90°$: $(a, b) \mapsto (-b, a) \mapsto (-a, -b)$, la simetría central respecto a O.

3.6–3.8

Segmentos en el plano

Parametrización y punto medio, traslado paralelo y caracterización del paralelismo.

Teorema 5 (parametrización)

Sean $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$. Para cada $t \in [0,1]$, el punto

$$P(t) = A + t(B - A)$$

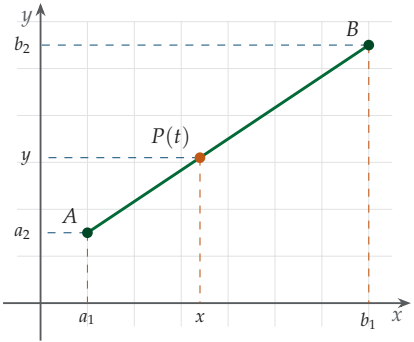
$$= \big(a_1 + t(b_1 - a_1),\ a_2 + t(b_2 - a_2)\big)$$

es el punto de $\overline{AB}$ con $AP = t \cdot AB$: va de A $(t = 0)$ a B $(t = 1)$.

Prueba. Sea $P \in \overline{AB}$ con $AP = t\,AB$. Las perpendiculares al eje x por A, P, B son paralelas; por **Thales**:

$$\frac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{AP}{AB} = t \ \Rightarrow\ x = a_1 + t(b_1 - a_1).$$

Igual con el eje y: $y = a_2 + t(b_2 - a_2)$. ■



Aquí $t = 0{,}4$.

Sentido contrario, punto medio y puntos de división

Corolario

1. **Sentido contrario**: $Q(t) = B + t(A - B)$ recorre el mismo segmento de B a A, y $Q(t) = P(1-t)$.
2. **Punto medio** ($t = \frac{1}{2}$):

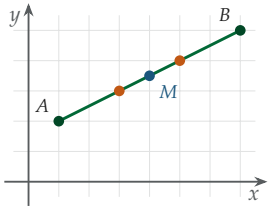
$$M = \left(\frac{a_1 + b_1}{2},\ \frac{a_2 + b_2}{2} \right).$$

3. El punto que divide $\overline{AB}$ en la razón $AP : PB = m : n$ corresponde a $t = \frac{m}{m+n}$.

Prueba. (1) $B + t(A - B) = A + (1-t)(B - A) = P(1-t)$. (2) y (3) son el teorema con $t = \frac{1}{2}$ y $t = \frac{m}{m+n}$. ■

Ejemplo. $A = (1,2)$ y $B = (7,5)$, $B - A = (6,3)$.

- $P(t) = (1 + 6t,\ 2 + 3t),\ \ t \in [0,1]$.
- Punto medio: $P(\frac{1}{2}) = (4,\ 3{,}5)$.
- Puntos de trisección: $P(\frac{1}{3}) = (3,3)$ y $P(\frac{2}{3}) = (5,4)$.
- En sentido contrario: $Q(t) = (7 - 6t,\ 5 - 3t)$.



Definición. **Trasladar** el segmento $\overline{AB}$ al punto C es construir el segmento $\overline{CD}$ con

$$D = C + (B - A) = (c_1 + b_1 - a_1,\ c_2 + b_2 - a_2).$$

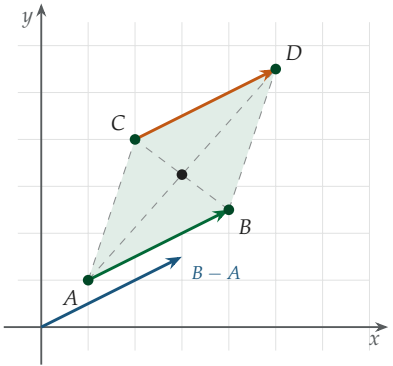
Teorema 6

Si $C \notin \overleftrightarrow{AB}$, el cuadrilátero $ABDC$ es un paralelogramo. En particular $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$ y $CD = AB$.

Prueba. Calculemos los puntos medios de las diagonales $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$:

$$\frac{A+D}{2} = \frac{A+C+B-A}{2} = \frac{B+C}{2}.$$

Las diagonales se bisecan, luego $ABDC$ es un paralelogramo (2.3.4). ■



Trasladado al origen, $\overline{AB}$ se convierte en el segmento de O a $B - A$.

Teorema 7 (criterio de paralelismo)

Sean $U = B - A = (u_1, u_2)$ y $V = D - C = (v_1, v_2)$, no nulos. Son equivalentes:

1. $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son paralelos (o están en una misma recta);
2. existe $\lambda \neq 0$ con $V = \lambda U$;
3. $u_1 v_2 - u_2 v_1 = 0$.

Si $\lambda > 0$ tienen el **mismo sentido**; si $\lambda < 0$, sentido contrario.

Prueba. (1)⇔(2): trasladamos ambos segmentos al origen; quedan $\overline{OU}$ y $\overline{OV}$, que son paralelos si y solo si O, U, V están en una misma recta, es decir (parametrizando la recta OU), $V = \lambda U$. (2)⇒(3): $u_1(\lambda u_2) - u_2(\lambda u_1) = 0$. (3)⇒(2): si $u_1 \neq 0$, sea $\lambda = \frac{v_1}{u_1}$; entonces $v_2 = \frac{u_2 v_1}{u_1} = \lambda u_2$. ■

Ejemplo. $A = (1,1)$, $B = (4,3)$, $C = (0,4)$, $D = (6,8)$:

$$U = (3,2), \quad V = (6,4) = 2U.$$

Paralelos y con el mismo sentido. Si en cambio $D = (5,7)$: $V = (5,3)$ y

$$3 \cdot 3 - 2 \cdot 5 = -1 \neq 0:$$

no son paralelos.

Corolario (colinealidad)

A, B, C son colineales $\iff$ $(b_1 - a_1)(c_2 - a_2) - (b_2 - a_2)(c_1 - a_1) = 0$.

3.9–3.14

Rectas en forma paramétrica

Distancia entre puntos, ecuaciones paramétricas, intersección, paralela y perpendicular por un punto, mediatriz, perpendicularidad y ángulo entre segmentos.

Teorema 8 (distancia)

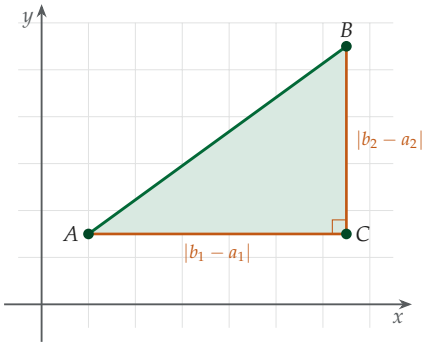
La distancia entre $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$ es

$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

Prueba. Si $a_1 \neq b_1$ y $a_2 \neq b_2$, sea $C = (b_1, a_2)$. $\overline{AC}$ es horizontal y $\overline{CB}$ vertical, luego $\triangle ACB$ es rectángulo en C, con catetos $AC = |b_1 - a_1|$ y $CB = |b_2 - a_2|$. Por **Pitágoras**:

$$AB^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2.$$

Si $a_1 = b_1$ o $a_2 = b_2$, el segmento es vertical u horizontal y la fórmula da $|b_2 - a_2|$ o $|b_1 - a_1|$ (3.2). ■



Ejemplo. $d\big((1,2),(7,10)\big) = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$

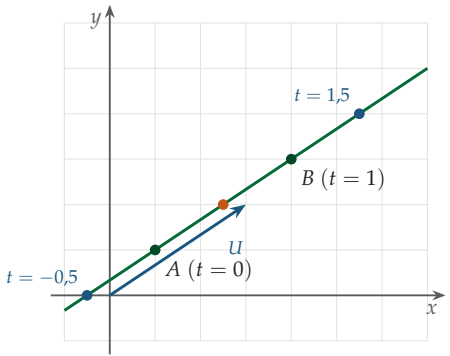
Teorema 9 (recta por dos puntos)

La recta que pasa por $A \neq B$ está formada por los puntos

$$\begin{cases} x = a_1 + t\,(b_1 - a_1) \\ y = a_2 + t\,(b_2 - a_2) \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Prueba. $P \in \overleftrightarrow{AB} \iff \overline{AP}$ y $\overline{AB}$ son paralelos o $P = A \iff$ (criterio 3.8) $P - A = t(B - A)$ para algún $t \in \mathbb{R}$. ■

- $U = B - A$ es un **vector director**: cualquier múltiplo no nulo sirve.
- $0 \leq t \leq 1$: el segmento; $t > 1$: más allá de B; $t < 0$: antes de A.



Ejemplo. Por $A = (1,1)$ y $B = (4,3)$: $x = 1 + 3t$, $y = 1 + 2t$. ¿Está $(10,7)$? $1 + 3t = 10 \Rightarrow t = 3$ y $1 + 2 \cdot 3 = 7$: sí.

Sean $L_1:\ A+tU$ y $L_2:\ C+sV$. Un punto común satisface $A+tU=C+sV$:

$$\begin{cases} u_1\,t - v_1\,s = c_1 - a_1 \\ u_2\,t - v_2\,s = c_2 - a_2 \end{cases}$$

Teorema 10

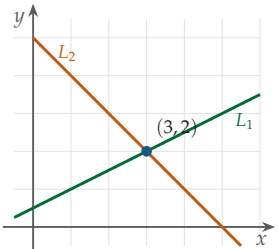
Si $u_1v_2 - u_2v_1 \neq 0$ las rectas son **secantes** (un único punto común). Si $u_1v_2 - u_2v_1 = 0$ son **paralelas** o **coincidentes**.

Prueba. El determinante del sistema es $-u_1v_2 + u_2v_1$. Si no es cero, el sistema tiene solución única. Si es cero, $U \parallel V$ (3.8): las rectas son paralelas (sin solución) o la misma recta (infinitas soluciones). ■

Ejemplo. $L_1:\ (1,1)+t(2,1)$, $L_2:\ (0,5)+s(1,-1)$.

$$\begin{cases} 1+2t = s \\ 1+t = 5-s \end{cases}$$

$\Rightarrow\ 1+t = 4-2t,\ t=1,\ s=3.$
Punto: $(1,1)+1\cdot(2,1) = (3,2)$.
Verificación en L_2: $(0+3,\ 5-3) = (3,2)$. ✓



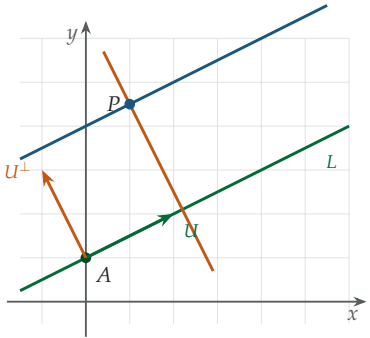
Teorema 11

Sea $L:\ A+tU$ y $P \notin L$. Con $U^{\perp} = (-u_2, u_1)$:

1. la **paralela** a L por P es $P+tU$;
2. la **perpendicular** a L por P es $P+sU^{\perp}$.

Prueba. (1) Su director es U (3.8) y es única por el postulado de Playfair. (2) Trasladamos U al origen y lo giramos 90° (3.5): $U^{\perp}$ es perpendicular a U; la recta por P con director $U^{\perp}$ es perpendicular a L, y es única. ■

Observación. El **pie de la perpendicular** se halla intersecando L con $P+sU^{\perp}$ (3.10).



Corolario (ecuación de la mediatriz)

La mediatriz de $\overline{AB}$ es la recta

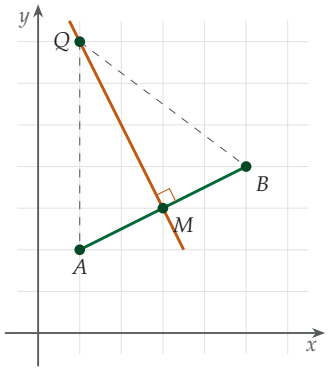
$$M + s\,(B-A)^{\perp}, \qquad M = \frac{A+B}{2}.$$

Prueba. La mediatriz es la perpendicular a $\overline{AB}$ por su punto medio (2.2.16); su director es $(B-A)^{\perp}$ por el teorema anterior. ■

Ejemplo. $A = (1,2)$, $B = (5,4)$: $M = (3,3)$, $B - A = (4,2)$, $(B-A)^{\perp} = (-2,4)$.

$$\text{mediatriz: } x = 3 - 2s, \quad y = 3 + 4s.$$

Comprobación con $s = 1$: $Q = (1,7)$, $d(Q,A) = \sqrt{0+25} = 5$ y $d(Q,B) = \sqrt{16+9} = 5$. ✓



Teorema 12 (criterio de perpendicularidad)

Con $U = B - A$ y $V = D - C$ no nulos:

$$\overline{AB} \perp \overline{CD} \iff u_1v_1 + u_2v_2 = 0.$$

Prueba. Trasladamos ambos segmentos al origen: $\overline{OU}$ y $\overline{OV}$. Son perpendiculares $\iff$ $\triangle OUV$ es rectángulo en O $\iff$ (Pitágoras y su recíproco)

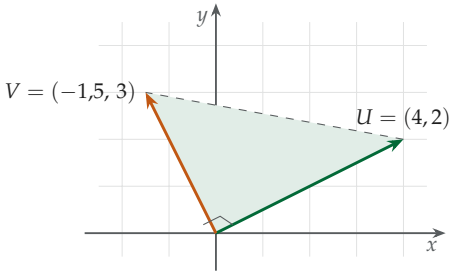
$$d(U,V)^2 = d(O,U)^2 + d(O,V)^2.$$

Con la fórmula de distancia:

$$(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 = u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2$$

$$\iff -2u_1v_1 - 2u_2v_2 = 0 \iff u_1v_1 + u_2v_2 = 0.$$

■



Ejemplo. $4 \cdot (-1{,}5) + 2 \cdot 3 = 0$: perpendiculares. En general U y $U^\perp = (-u_2, u_1)$ cumplen $u_1(-u_2) + u_2u_1 = 0$.

Teorema 13 (ángulo)

El ángulo θ entre $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ (con $U = B - A$, $V = D - C$ trasladados al origen) cumple

$$\cos\theta = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\,\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}.$$

Prueba. En $\triangle OUV$, la **ley del coseno** da

$$d(U,V)^2 = |U|^2 + |V|^2 - 2|U||V|\cos\theta.$$

Desarrollando el lado izquierdo como en la prueba anterior, $d(U,V)^2 = |U|^2 + |V|^2 - 2(u_1v_1 + u_2v_2)$. Igualando: $|U||V|\cos\theta = u_1v_1 + u_2v_2$. ■

Ejemplo. $U = (3,1)$ y $V = (1,2)$:

$$\cos\theta = \frac{3+2}{\sqrt{10}\,\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

luego $\theta = 45°$.

Ejemplo (ángulo de un triángulo). $A = (0,0)$, $B = (4,0)$, $C = (1,3)$. En A: $U = (4,0)$, $V = (1,3)$,

$$\cos A = \frac{4}{4\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \;\Rightarrow\; A \approx 71{,}6°.$$

Observación. $\cos\theta = 0$ recupera el criterio de perpendicularidad.

3.15–3.19

Ecuaciones de la recta

Pendiente, rectas verticales y horizontales, ecuación simétrica, ecuación general, criterios de paralelismo y perpendicularidad, distancias y área del triángulo.

Pendiente y ecuación punto–pendiente

Sea $L:\ x = x_0 + tu_1,\ y = y_0 + tu_2$.

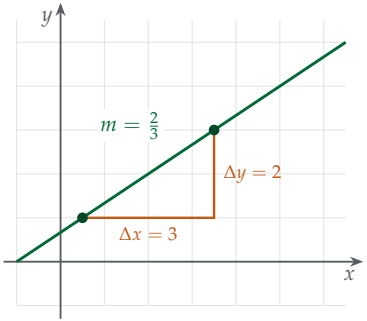
- Si $u_1 = 0$: L es **vertical**, $x = x_0$.
- Si $u_2 = 0$: L es **horizontal**, $y = y_0$.

Teorema 14 (pendiente)

Si L no es vertical, el número $m = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$ no depende de los puntos A, B de L que se elijan, y

$$L:\quad y - y_0 = m\,(x - x_0).$$

Prueba. Otro director es λU (3.8), y $\frac{\lambda u_2}{\lambda u_1} = \frac{u_2}{u_1}$. Despejando $t = \frac{x - x_0}{u_1}$ en la primera ecuación y sustituyendo en la segunda: $y = y_0 + \frac{u_2}{u_1}(x - x_0)$. ■



Ejemplo. Recta por $(1,2)$ y $(4,8)$: $m = \frac{6}{3} = 2$, $y - 2 = 2(x - 1)$, es decir $y = 2x$.

Pendiente, inclinación y colinealidad

Interpretación. Si α es el ángulo que forma L con el eje x positivo (**inclinación**), entonces $m = \tan\alpha$: en el triángulo rectángulo de catetos Δx y Δy, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es la tangente de α.

- $m > 0$: la recta sube; $m < 0$: baja; $m = 0$: horizontal.
- Forma **pendiente–intercepto**: $y = mx + b$, con b el corte con el eje y.

Corolario (colinealidad)

Tres puntos A, B, C (sin dos en una vertical) son colineales si y solo si $m_{AB} = m_{AC}$.

Prueba. Las rectas AB y AC pasan por A; si tienen la misma pendiente son la misma recta (punto–pendiente). Recíprocamente, si $C \in \overleftrightarrow{AB}$, la pendiente no depende de los puntos elegidos. ■

Ejemplo. $A = (1,1)$, $B = (3,5)$, $C = (5,9)$: $m_{AB} = 2 = m_{AC}$, colineales.

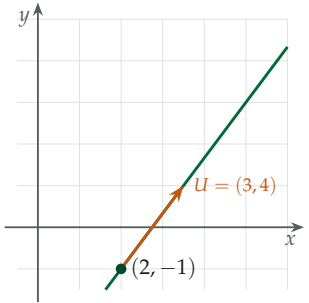
Ecuación simétrica de la recta

Teorema 15 (forma simétrica)

Si $u_1 \neq 0$ y $u_2 \neq 0$, la recta $x = x_0 + tu_1,\ y = y_0 + tu_2$ es

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2}.$$

Prueba. Ambos cocientes son iguales al parámetro t; al eliminarlo queda la igualdad. Recíprocamente, si (x, y) cumple la igualdad, llamando t al valor común se recuperan las ecuaciones paramétricas. ■



Ejemplo. Por $(2, -1)$ con director $(3, 4)$: $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{4}$.

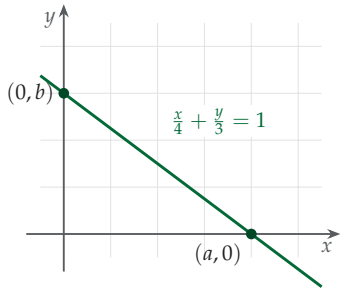
Corolario (forma segmentaria)

La recta que corta los ejes en $(a,0)$ y $(0,b)$, con $a,b \neq 0$, es

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Prueba. Con $P_0 = (a,0)$ y $U = (0,b) - (a,0) = (-a,b)$, la forma simétrica es $\frac{x-a}{-a} = \frac{y}{b}$, es decir $1 - \frac{x}{a} = \frac{y}{b}$. ■

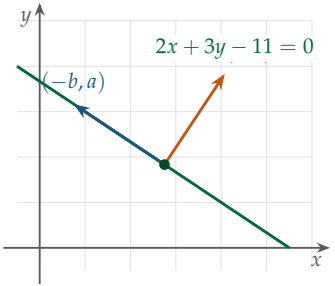
Ejemplo. La recta $3x + 4y = 12$ se escribe $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$: corta los ejes en $(4,0)$ y $(0,3)$.



Teorema 16 (ecuación general)

Toda recta del plano tiene una ecuación $ax + by + c = 0$ con $(a, b) \neq (0, 0)$, y toda ecuación de ese tipo representa una recta. Además, $N = (a, b)$ es **perpendicular** (normal) a la recta.

Prueba. De la forma simétrica, $u_2(x - x_0) - u_1(y - y_0) = 0$: basta $a = u_2$, $b = -u_1$ (vale también si u_1 o u_2 es cero). Recíprocamente, si $b \neq 0$: $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, recta de pendiente $-\frac{a}{b}$; si $b = 0$: $x = -\frac{c}{a}$, recta vertical. Si P, Q están en la recta, restando sus ecuaciones: $a(q_1 - p_1) + b(q_2 - p_2) = 0$, luego $N \perp \overline{PQ}$ (3.13). ■



- Director: $(-b, a)$; pendiente: $-\frac{a}{b}$.
- $c = 0$: la recta pasa por el origen.
- $a = 0$: horizontal; $b = 0$: vertical.

Teorema 17

Sean $L_1:\ a_1x+b_1y+c_1=0$ y $L_2:\ a_2x+b_2y+c_2=0$.

1. $L_1 \parallel L_2$ (o coinciden) $\iff a_1b_2-a_2b_1=0 \iff m_1=m_2$.
2. $L_1 \perp L_2 \iff a_1a_2+b_1b_2=0 \iff m_1m_2=-1$.

Prueba. Dos rectas son paralelas (perpendiculares) si y solo si lo son sus normales $N_1=(a_1,b_1)$ y $N_2=(a_2,b_2)$. Se aplican 3.8 y 3.13. Con pendientes $m_i=-\frac{a_i}{b_i}$: $a_1a_2+b_1b_2=0 \iff \frac{a_1a_2}{b_1b_2}=-1 \iff m_1m_2=-1$. ■

Ejemplo. $L:\ 2x-3y+1=0$.

- $4x-6y+7=0$ es paralela: $2(-6)-4(-3)=0$.
- $3x+2y-5=0$ es perpendicular: $2\cdot 3+(-3)\cdot 2=0$.

Rectas por un punto P. Paralela a $ax+by+c=0$: $a(x-p_1)+b(y-p_2)=0$.
Perpendicular: $b(x-p_1)-a(y-p_2)=0$.

Teorema 18 (distancia punto–recta)

La distancia de $P = (p_1, p_2)$ a $L:\ ax + by + c = 0$ es

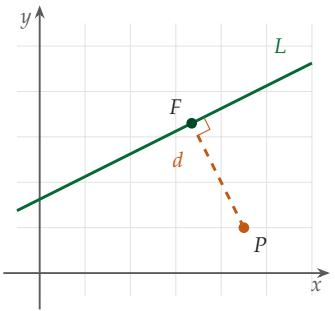
$$d(P, L) = \frac{|a\,p_1 + b\,p_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Prueba. La perpendicular a L por P es $F(\lambda) = P + \lambda N$, con $N = (a, b)$. El pie F cumple la ecuación de L:

$$a(p_1 + \lambda a) + b(p_2 + \lambda b) + c = 0 \ \Rightarrow\ \lambda = -\frac{ap_1 + bp_2 + c}{a^2 + b^2}.$$

La distancia de un punto a una recta se mide sobre la perpendicular (2.2.15):

$$d(P, L) = d(P, F) = |\lambda|\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad \blacksquare$$



Ejemplo. $P = (3, -1)$, $L:\ 3x + 4y - 10 = 0$:

$$d = \frac{|9 - 4 - 10|}{5} = 1.$$

Corolario (rectas paralelas)

Si $L_1: \ ax+by+c_1=0$ y $L_2: \ ax+by+c_2=0$,

$$d(L_1,L_2)=\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Prueba. Tomamos $P\in L_1$, es decir $ap_1+bp_2=-c_1$. Entonces $d(P,L_2)=\frac{|-c_1+c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, que no depende de P. ■

Ejemplo. $3x+4y-10=0$ y $3x+4y+5=0$: $d=\frac{15}{5}=3$.

Teorema 19 (área del triángulo)

El triángulo de vértices A, B, C tiene área

$$\frac{1}{2}\left|(b_1-a_1)(c_2-a_2)-(b_2-a_2)(c_1-a_1)\right|.$$

Prueba. La recta AB es $(b_2-a_2)(x-a_1)-(b_1-a_1)(y-a_2)=0$, con normal de longitud AB. La altura desde C es $h=\frac{|(b_2-a_2)(c_1-a_1)-(b_1-a_1)(c_2-a_2)|}{AB}$, y el área es $\frac{1}{2}AB\cdot h$. ■

Ejemplo. $A=(1,1)$, $B=(5,2)$, $C=(2,4)$: $\frac{1}{2}|4\cdot 3-1\cdot 1|=\frac{11}{2}$.

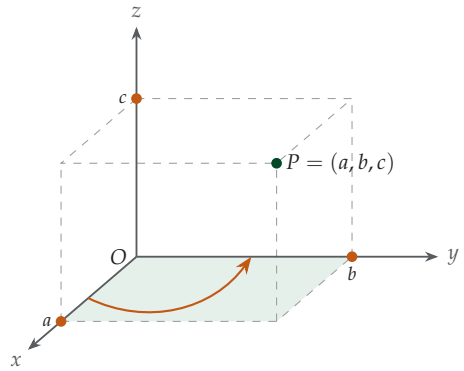
3.20–3.27

Coordenadas y rectas en el espacio

Sistema tridimensional, distancia, parametrización, transporte paralelo, ecuaciones de la recta, criterios de paralelismo y perpendicularidad, y posiciones relativas.

Definición. Tres rectas orientadas x, y, z, perpendiculares dos a dos, con origen común O y la misma unidad. A cada punto P le corresponde una terna (a, b, c): las abscisas de los pies de los planos perpendiculares a cada eje trazados por P.

- **Planos coordenados**: xy $(z = 0)$, yz $(x = 0)$, xz $(y = 0)$; dividen el espacio en 8 **octantes**.
- **Regla de la mano derecha**: si los dedos de la mano derecha giran del eje x positivo hacia el eje y positivo, el pulgar señala el eje z positivo. Así el sistema es **dextrógiro**.



El arco naranja: giro de x hacia y; el pulgar apunta a z.

Teorema 20 (distancia en el espacio)

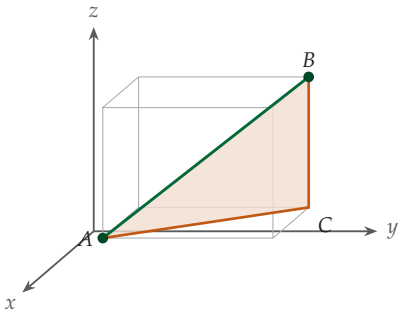
Si $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$,

$$d(A,B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}.$$

Prueba. Los planos por A y por B paralelos a los planos coordenados forman una caja (paralelepípedo rectangular) de aristas $|b_1 - a_1|$, $|b_2 - a_2|$, $|b_3 - a_3|$, y $\overline{AB}$ es una de sus diagonales. Por el teorema de la diagonal del ortoedro (2.7.10), que es Pitágoras aplicado dos veces:

$$AC^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2,$$

$$AB^2 = AC^2 + (b_3 - a_3)^2. \quad \blacksquare$$



Ejemplo. $d\big((1,2,3),(3,-1,9)\big) = \sqrt{4+9+36} = 7.$

Teorema 21 (parametrización)

Para $t \in [0,1]$,

$$P(t) = A + t(B - A)$$

$$= \big(a_1 + t(b_1 - a_1),\ a_2 + t(b_2 - a_2),\ a_3 + t(b_3 - a_3)\big)$$

es el punto de $\overline{AB}$ con $AP = t\,AB$. Punto medio: $M = \left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \frac{a_3+b_3}{2}\right)$.

Prueba. Los planos perpendiculares al eje x por A, P, B son paralelos; por **Thales en el espacio** (2.7.6) cortan segmentos proporcionales sobre $\overleftrightarrow{AB}$ y sobre el eje x: $x = a_1 + t(b_1 - a_1)$. Igual con y y z. ■

Definición (transporte paralelo). Trasladar $\overline{AB}$ al punto C da $\overline{CD}$ con $D = C + (B - A)$. Si $C \notin \overleftrightarrow{AB}$, $ABDC$ es un paralelogramo: las diagonales tienen el mismo punto medio $\frac{B+C}{2}$, igual que en el plano.

Ejemplo. $A = (1,0,2)$, $B = (3,4,0)$: $M = (2,2,1)$.
Transporte a $C = (0,1,1)$: $D = (0,1,1) + (2,4,-2) = (2,5,-1)$.
Puntos de trisección: $P(\frac{1}{3}) = (\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$, $P(\frac{2}{3}) = (\frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \frac{2}{3})$.

Teorema 22

La recta que pasa por $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ con director $U = (u_1, u_2, u_3) \neq 0$ es

$$\begin{cases} x = x_0 + t\,u_1 \\ y = y_0 + t\,u_2 \\ z = z_0 + t\,u_3 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R},$$

y, si $u_1 u_2 u_3 \neq 0$, su forma **simétrica** es

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}.$$

Si alguna componente es cero, por ejemplo $u_3 = 0$: $\frac{x-x_0}{u_1} = \frac{y-y_0}{u_2}$, $z = z_0$.

Ejemplo. Recta por $A = (1,2,3)$ y $B = (4,0,5)$: $U = (3,-2,2)$.

$$x = 1 + 3t, \quad y = 2 - 2t, \quad z = 3 + 2t,$$

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{2}.$$

¿Está $(7,-2,7)$? $\frac{6}{3} = \frac{-4}{-2} = \frac{4}{2} = 2$: sí $(t = 2)$.

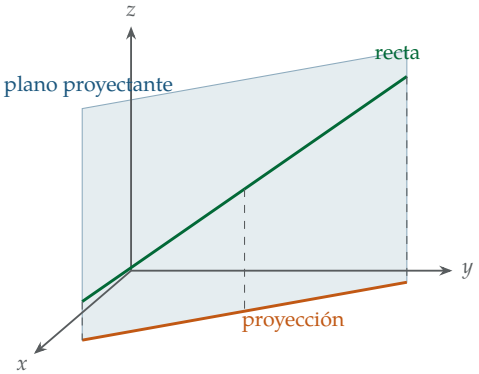
Observación. Los números (u_1, u_2, u_3) son los **números directores**; cualquier múltiplo no nulo describe la misma dirección.

Interpretación geométrica de las ecuaciones simétricas

Cada igualdad de la forma simétrica involucra solo dos variables:

$$\underbrace{\frac{x-x_0}{u_1}=\frac{y-y_0}{u_2}}_{\text{no aparece } z} \qquad \underbrace{\frac{y-y_0}{u_2}=\frac{z-z_0}{u_3}}_{\text{no aparece } x}$$

- La primera es un **plano perpendicular al plano** xy (si (x,y,z) la cumple, también la cumple (x,y,z') para todo z'): el **plano proyectante** de la recta sobre el plano xy.
- Su traza en el plano xy es la **proyección** de la recta sobre ese plano.
- La recta es la **intersección de dos planos proyectantes**.



Teorema 23

Sean L_1 y L_2 rectas con directores U y V.

1. $L_1 \parallel L_2$ (o coinciden) $\iff V = \lambda U$ para algún $\lambda \neq 0$.
2. $L_1 \perp L_2$ (**ortogonales**) $\iff u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0$.

Prueba. (1) Como en el plano (3.8), trasladando los directores al origen. (2) Trasladados al origen, $\overline{OU} \perp \overline{OV} \iff d(U,V)^2 = |U|^2 + |V|^2$ (Pitágoras), y con la fórmula de distancia en el espacio esto equivale a $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0$. ■

Observación. En el espacio dos rectas **ortogonales** pueden no cortarse: son las *alabeadas ortogonales* de 2.7.2.

Ejemplo. $U = (1,-2,3)$, $V = (-2,4,-6)$: $V = -2U$, paralelas.

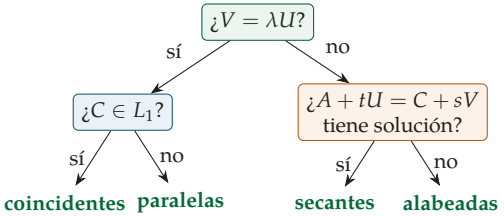
Ejemplo. $U = (2,1,-1)$, $V = (1,1,3)$: $2+1-3=0$, ortogonales.

Ángulo. Como en 3.14, con la ley del coseno:

$$\cos\theta = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{|U|\,|V|}.$$

Posiciones relativas de dos rectas en el espacio

Sean $L_1:\ A+tU$ y $L_2:\ C+sV$.



El sistema $A+tU=C+sV$ tiene *tres* ecuaciones y dos incógnitas: puede no tener solución aunque las rectas no sean paralelas.

Ejemplo (secantes). $L_1:\ (1,2,3)+t(1,-1,2)$, $L_2:\ (2,0,4)+s(0,1,1)$. $1+t=2\Rightarrow t=1$; $2-t=s\Rightarrow s=1$; $3+2t=4+s$: $5=5$. ✓ Se cortan en $(2,1,5)$.

Ejemplo (alabeadas). $L_1:\ (t,0,0)$ (eje x), $L_2:\ (0,1,1)+s(0,0,1)$. Directores no proporcionales; $t=0$, $0=1$: imposible. Además $1\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 1=0$: son **alabeadas ortogonales**.

Ejemplo (paralelas). $L_1:\ (1,0,2)+t(2,4,-2)$, $L_2:\ (0,1,1)+s(-1,-2,1)$: directores proporcionales. $(0,1,1)\in L_1$? $1+2t=0\Rightarrow t=-\frac{1}{2}$, pero $4t=-2\neq 1$: paralelas distintas.

3.28

Planos en el espacio

Ecuación analítica del plano, sus propiedades, posiciones relativas, intersección con rectas y distancias.

Ecuación del plano

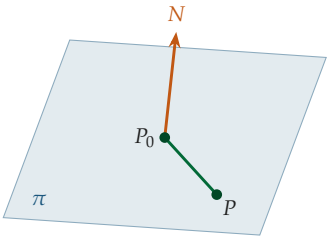
Teorema 24 (ecuación del plano)

El plano que pasa por $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y es perpendicular a la dirección $N = (a, b, c) \neq 0$ (**normal**) es

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

o sea $ax + by + cz + d = 0$. Recíprocamente, toda ecuación $ax + by + cz + d = 0$ con $(a, b, c) \neq 0$ es un plano de normal (a, b, c).

Prueba. Sea n la recta por P_0 con director N. El plano perpendicular a n en P_0 está formado por los P con $P = P_0$ o $\overleftrightarrow{P_0P} \perp n$ (2.7.3). Por 3.26, eso equivale a $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$. Recíprocamente, si $a \neq 0$, $\left(-\frac{d}{a}, 0, 0\right)$ cumple la ecuación, que toma la forma anterior. ■



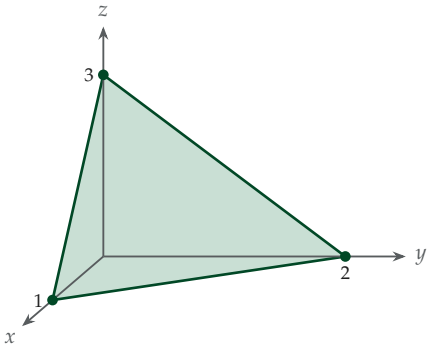
$P \in \pi \iff \overline{P_0P} \perp N.$

Propiedades y casos particulares

- $d = 0$: el plano pasa por el origen.
- **Falta una variable** $\Rightarrow$ el plano es paralelo al eje de esa variable. Ej.: $x + y = 2$ es paralelo al eje z (un plano proyectante, 3.25).
- **Faltan dos variables**: plano paralelo a un plano coordenado. Ej.: $z = 3$.
- **Forma segmentaria**: si corta los ejes en $(p, 0, 0)$, $(0, q, 0)$, $(0, 0, r)$:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1.$$

- Las **trazas** son las rectas en que el plano corta a los planos coordenados.



$\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$, es decir $6x + 3y + 2z = 6$.

(En el dibujo las unidades de los ejes no son iguales.)

Plano que pasa por tres puntos

Tres puntos no colineales A, B, C determinan un plano (postulado 2.7.1). Para hallar su ecuación buscamos una normal $N = (a, b, c)$ **ortogonal** a $\overline{AB}$ y a $\overline{AC}$:

$$\begin{cases} a(b_1 - a_1) + b(b_2 - a_2) + c(b_3 - a_3) = 0 \\ a(c_1 - a_1) + b(c_2 - a_2) + c(c_3 - a_3) = 0 \end{cases}$$

El sistema tiene infinitas soluciones proporcionales; se escoge una no nula.

Observación. En Geometría Vectorial, el *producto vectorial* dará N directamente.

Ejemplo. $A = (1,1,1)$, $B = (2,3,1)$, $C = (1,2,4)$. $B - A = (1,2,0)$, $C - A = (0,1,3)$:

$$a + 2b = 0, \qquad b + 3c = 0.$$

Con $c = 1$: $b = -3$, $a = 6$. $N = (6, -3, 1)$.

$$6(x-1) - 3(y-1) + (z-1) = 0$$

$$6x - 3y + z - 4 = 0.$$

Verificación: B: $12 - 9 + 1 - 4 = 0$; C: $6 - 6 + 4 - 4 = 0$. ✓

Posiciones relativas de dos planos

Teorema 25

Sean $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ y $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, con normales N_1 y N_2.

1. $N_2 = \lambda N_1$ y $d_2 = \lambda d_1$: **coincidentes**.
2. $N_2 = \lambda N_1$ y $d_2 \neq \lambda d_1$: **paralelos**.
3. N_1, N_2 no proporcionales: **secantes**; se cortan en una recta.
4. $\pi_1 \perp \pi_2 \iff a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

Prueba. Dos planos son paralelos (perpendiculares) si y solo si lo son sus rectas normales (2.7.2, 2.7.7), y se aplica 3.26. Si no son paralelos, se cortan en una recta (postulado 2.7.1). ■

Ejemplo (recta de intersección). $\pi_1 : x + y + z = 3$, $\pi_2 : x - y + z = 1$. Sumando: $x + z = 2$; restando: $y = 1$. Con $z = t$:

$$x = 2 - t, \quad y = 1, \quad z = t.$$

Recta $(2, 1, 0) + t(-1, 0, 1)$. Su director es ortogonal a ambas normales: $-1 + 0 + 1 = 0$ y $-1 - 0 + 1 = 0$. ✓

Ejemplo. $2x - y + 3z = 1$ y $4x - 2y + 6z = 5$: paralelos ($N_2 = 2N_1$, $5 \neq 2$).

Teorema 26

Sean $L:\ P_0 + tU$ y $\pi:\ ax + by + cz + d = 0$ con normal N, y $U \cdot N = au_1 + bu_2 + cu_3$.

1. $U \cdot N \neq 0$: L corta a π en un único punto.
2. $U \cdot N = 0$ y $P_0 \notin \pi$: $L \parallel \pi$.
3. $U \cdot N = 0$ y $P_0 \in \pi$: $L \subset \pi$.
4. $L \perp \pi \iff U = \lambda N$.

Prueba. Sustituyendo $P_0 + tU$ en la ecuación del plano:

$$(ax_0 + by_0 + cz_0 + d) + t\,(au_1 + bu_2 + cu_3) = 0.$$

Si el coeficiente de t no es cero hay una única solución; si es cero, hay infinitas (si $P_0 \in \pi$) o ninguna. (4): L es perpendicular a π si es paralela a su normal. ■

Ejemplo. $L:\ (1,2,0) + t(1,1,2)$, $\pi:\ 2x - y + z = 6$.

$$2(1+t) - (2+t) + 2t = 6$$

$\Rightarrow\ 3t = 6,\ t = 2$. Punto de corte: $(3,4,4)$. Verificación: $6 - 4 + 4 = 6$. ✓

Ejemplo. La recta por $(1,0,5)$ perpendicular a $2x - y + z = 6$ es $(1,0,5) + t(2,-1,1)$.

Distancia de un punto a un plano

Teorema 27 (distancia punto–plano)

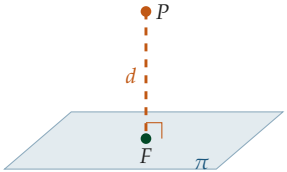
La distancia de $P = (p_1, p_2, p_3)$ al plano $ax + by + cz + d = 0$ es

$$d(P, \pi) = \frac{|a\,p_1 + b\,p_2 + c\,p_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Prueba. La perpendicular a π por P es $P + \lambda N$; su pie F satisface la ecuación del plano:

$$\lambda = -\frac{ap_1 + bp_2 + cp_3 + d}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

La distancia se mide sobre la perpendicular (2.7.3): $d(P, F) = |\lambda|\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. ■



Corolario

Entre planos paralelos $ax + by + cz + d_i = 0$: $\dfrac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Ejemplo. $P = (1, 2, 3)$, $\pi : \; 2x - y + 2z + 3 = 0$: $d = \frac{|2-2+6+3|}{3} = 3$.

Resumen: del plano al espacio

	En el plano	**En el espacio**
Distancia	$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$	$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$
Segmento, punto medio	$A + t(B - A)$, $\frac{A+B}{2}$	igual, con tres coordenadas
Recta	$A + tU$ o $ax + by + c = 0$	$A + tU$ o forma simétrica
Paralelismo	$V = \lambda U$	$V = \lambda U$
Perpendicularidad	$u_1v_1 + u_2v_2 = 0$	$u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0$
Normal	(a, b) de la recta	(a, b, c) del plano $ax + by + cz + d = 0$
Distancia a	recta: $\frac{\lvert ap_1+bp_2+c\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$	plano: $\frac{\lvert ap_1+bp_2+cp_3+d\rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Las expresiones $u_1v_1 + u_2v_2(+u_3v_3)$ serán el *producto interno* de la Geometría Vectorial.

¡Gracias!

Próximo capítulo: Geometría Vectorial