UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Instituto de Matemáticas
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

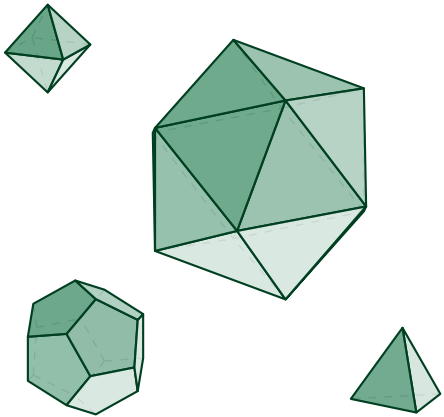
Geometría Básica · Unidad 2.7

Introducción a la Geometría del Espacio

Poliedros, prismas, pirámides, volumen y esfera

Temas 2.7.8 – 2.7.14 del contenido detallado

Santiago Alzate Suárez
Semestre 2026-2



Hoja de ruta

2.7.8 Poliedros: clasificación, ángulos poliedros, sólidos platónicos, teorema de Euler y suma de ángulos de las caras.

2.7.9 Prismas: sección recta, sección transversal y área lateral.

2.7.10 Paralelepípedos y sus propiedades.

2.7.11 Pirámides y sus propiedades.

2.7.12 Conjuntos medibles y postulados del volumen.

2.7.13 Principio de Cavalieri: prisma, pirámide, cilindro y cono.

2.7.14 La esfera: volumen y área superficial.

Lo que usaremos.

- Postulados del espacio y posiciones relativas (2.7.1–2.7.2).
- Perpendicularidad recta–plano (2.7.3–2.7.5).
- Thales en el espacio (2.7.6) y ángulos diedros (2.7.7).
- Del plano: congruencia, bisagra, Thales, semejanza, Pitágoras y áreas.

2.7.8

Poliedros

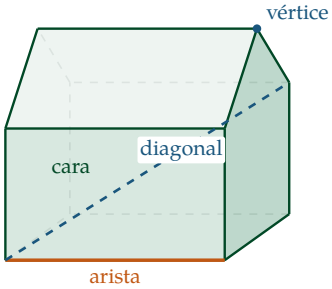
Clasificación, ángulos poliedros, sólidos platónicos, teorema de Euler y ángulos de las caras de un poliedro.

¿Qué es un poliedro?

Definición. Un **poliedro** es un sólido limitado por un número finito de regiones poligonales planas, de modo que

- cada lado de un polígono es lado de *exactamente otro* polígono;
- dos polígonos con un lado común no están en el mismo plano.

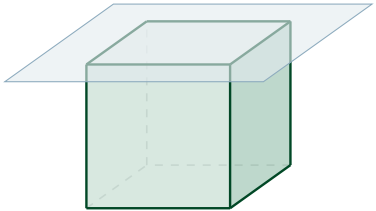
- **Caras**: los polígonos que lo limitan.
- **Aristas**: los lados de las caras.
- **Vértices**: los vértices de las caras.
- **Diagonal**: segmento que une dos vértices que no están en una misma cara.



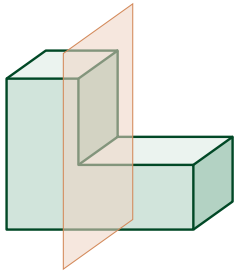
La «casa»: $V = 10$ vértices, $A = 15$ aristas, $C = 7$ caras.

Poliedros convexos y no convexos

Definición. Un poliedro es **convexo** si queda completamente a un mismo lado del plano de *cada una* de sus caras. En caso contrario es **cóncavo** (no convexo).



Convexo: el cubo queda bajo el plano de su cara superior, y lo mismo pasa con cada cara.

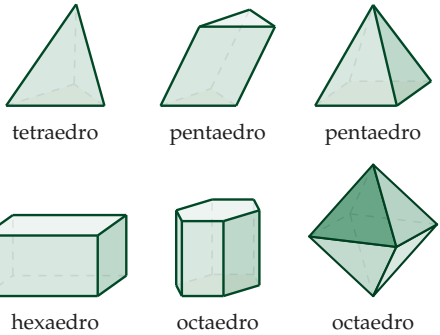


No convexo: el plano de la cara interior (naranja) corta al sólido; hay partes a ambos lados.

Clasificación de los poliedros

Según el número de caras

Caras	Nombre
4	Tetraedro
5	Pentaedro
6	Hexaedro
7	Heptaedro
8	Octaedro
10	Decaedro
12	Dodecaedro
20	Icosaedro



Observación. El nombre solo cuenta caras: hay muchos hexaedros distintos (cubo, paralelepípedos, pirámide pentagonal...). Un poliedro es **regular** cuando todas sus caras son polígonos regulares congruentes y en cada vértice concurre el mismo número de caras.

Ángulo poliedro

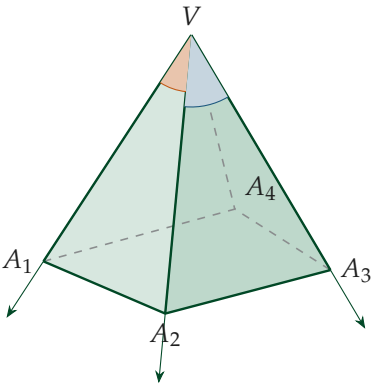
Definición. Sean V un punto y $A_1A_2\cdots A_n$ un polígono convexo en un plano que no contiene a V. La unión de los ángulos

$$\angle A_1VA_2,\ \angle A_2VA_3,\ \ldots,\ \angle A_nVA_1$$

(con sus interiores) es un **ángulo poliedro** de vértice V.

- Las semirrectas $\overrightarrow{VA_i}$ son sus **aristas**.
- Los ángulos $\angle A_iVA_{i+1}$ son sus **ángulos de cara**.
- Dos caras consecutivas forman un **ángulo diedro**.
- Si $n = 3$ se llama **triedro**.

En cada vértice de un poliedro convexo hay un ángulo poliedro.



Ángulo poliedro de cuatro caras (tetraedro): dos de sus ángulos de cara resaltados.

Desigualdad en el triedro

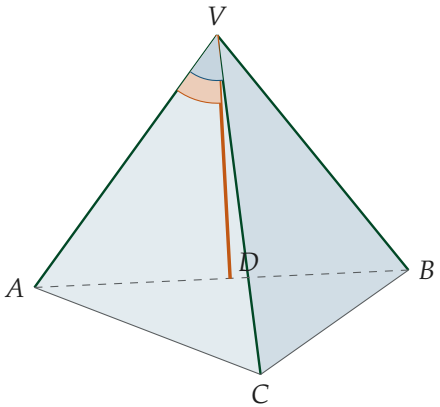
Teorema 1 (ángulos de un triedro)

En todo triedro, cada ángulo de cara es *menor* que la suma de los otros dos:

$$m\angle AVB < m\angle AVC + m\angle CVB.$$

Idea. Es la versión «en el espacio» de la desigualdad triangular. La prueba usa el **teorema de la bisagra** (2.2.14).

Recordemos: bisagra (recíproco). Si $\triangle PQR$ y $\triangle P'Q'R'$ tienen $PQ = P'Q'$, $PR = P'R'$ y $QR < Q'R'$, entonces $m\angle P < m\angle P'$.



$D \in \overline{AB}$ con $\angle AVD \cong \angle AVC$ y $VD = VC$.

Desigualdad en el triedro: demostración

Prueba. Si $\angle AVB$ no es el mayor ángulo de cara, la desigualdad es inmediata. Supongamos que $\angle AVB$ es el mayor.

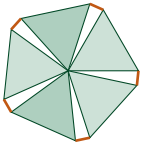
1. **Construcción.** Tomamos A y B sobre sus aristas. En el plano AVB trazamos $\overrightarrow{VD}$ con $\angle AVD \cong \angle AVC$ (cabe dentro de $\angle AVB$ por ser este el mayor), con $D \in \overline{AB}$. Luego elegimos C en su arista de modo que $VC = VD$.
2. **Congruencia.** $\triangle AVD \cong \triangle AVC$ por **L-A-L** (VA común, $\angle AVD \cong \angle AVC$, $VD = VC$). Luego $AD = AC$.
3. **Desigualdad triangular** en $\triangle ABC$:
   $AB < AC + CB \;\Rightarrow\; AD + DB < AD + CB \;\Rightarrow\; DB < CB$.
4. **Bisagra.** En $\triangle DVB$ y $\triangle CVB$: $VD = VC$, VB común y $DB < CB$; por el recíproco de la bisagra, $m\angle DVB < m\angle CVB$.
5. **Conclusión.** $m\angle AVB = m\angle AVD + m\angle DVB < m\angle AVC + m\angle CVB$. ■

La suma de los ángulos de cara

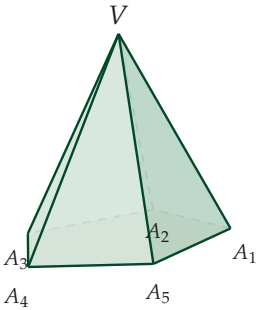
Teorema 2

En todo ángulo poliedro convexo la suma de los ángulos de cara es *menor que* 360°.

Intuición. Si «aplastamos» el vértice contra el plano, los ángulos de cara se abren hasta llenar 360°; mientras haya punta, falta algo para completar la vuelta.



al desplegar las caras queda un «hueco»: la suma es menor que 360°



Un plano corta las aristas en $A_1, \ldots, A_n$.

La suma de los ángulos de cara: demostración

Prueba. Sea S la suma de los n ángulos de cara en V. Un plano corta las aristas en $A_1, \ldots, A_n$, formando un polígono convexo y n triángulos laterales VA_iA_{i+1}.

1. **Suma de los ángulos de los n triángulos laterales:** $180°n$. Los ángulos en V suman S, así que los ángulos de las bases suman $180°n - S$.
2. **En cada A_i hay un triedro** con caras $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$, $\angle VA_iA_{i-1}$ y $\angle VA_iA_{i+1}$. Por el teorema anterior:
$$m\angle A_{i-1}A_iA_{i+1} < m\angle VA_iA_{i-1} + m\angle VA_iA_{i+1}.$$
3. **Sumando para $i = 1, \ldots, n$:** a la izquierda queda la suma de ángulos interiores del polígono; a la derecha, todos los ángulos de las bases:
$$(n-2)\,180° \;<\; 180°n - S.$$
4. **Despejando:** $S < 180°n - (n-2)180° = 360°$. ■

Sólo existen cinco poliedros regulares

Teorema 3 (sólidos platónicos)

Existen exactamente cinco poliedros regulares convexos.

Prueba. Sean las caras n-ágonos regulares ($n \geq 3$) y concurran $m \geq 3$ caras en cada vértice. Cada ángulo interior mide $\dfrac{(n-2)180^\circ}{n}$. Por el teorema anterior:

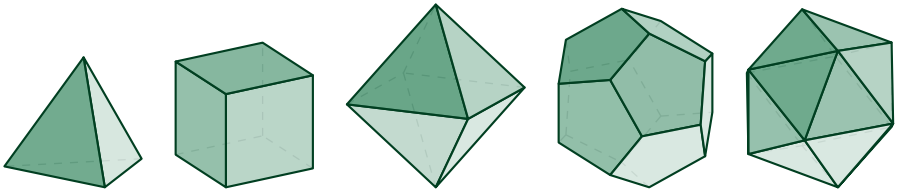
$$m \cdot \frac{(n-2)180^\circ}{n} < 360^\circ \iff (m-2)(n-2) < 4.$$

Como $m-2 \geq 1$ y $n-2 \geq 1$, solo hay cinco posibilidades (tabla). Si $n \geq 6$, el ángulo es $\geq 120^\circ$ y tres caras ya suman $\geq 360^\circ$: imposible. ■

n	m	suma en vértice	sólido
3	3	180°	tetraedro
3	4	240°	octaedro
3	5	300°	icosaedro
4	3	270°	cubo
5	3	324°	dodecaedro
3	6	360°	plano
4	4	360°	plano
6	3	360°	plano

Con suma 360° se tesela el plano: no hay «punta».

Los cinco sólidos platónicos



Tetraedro	**Cubo**	**Octaedro**	**Dodecaedro**	**Icosaedro**
4 triángulos	6 cuadrados	8 triángulos	12 pentágonos	20 triángulos
$V = 4,\ A = 6$	$V = 8,\ A = 12$	$V = 6,\ A = 12$	$V = 20,\ A = 30$	$V = 12,\ A = 30$

Dualidad. Si unimos los centros de caras vecinas, el cubo da un octaedro y viceversa; el dodecaedro da un icosaedro y viceversa; el tetraedro da otro tetraedro. Por eso los números de caras y vértices se intercambian.

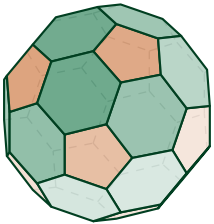
El teorema de Euler

Teorema 4 (Euler, 1758)

En todo poliedro convexo con V vértices, A aristas y C caras,

$$\boxed{V - A + C = 2}$$

Poliedro	V	A	C	$V - A + C$
Pirámide cuadrangular	5	8	5	**2**
Prisma triangular	6	9	5	**2**
La «casa»	10	15	7	**2**
Cubo	8	12	6	**2**
Octaedro	6	12	8	**2**
Dodecaedro	20	30	12	**2**
Icosaedro	12	30	20	**2**
Balón de fútbol	60	90	32	**2**



Icosaedro truncado (balón):
12 pentágonos y 20 hexágonos.

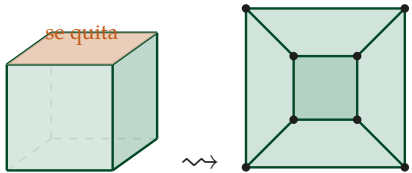
Demostración del teorema de Euler (método de Cauchy)

Paso 1: aplanar el poliedro

1. Quitamos una cara y «estiramos» el resto sobre un plano, como una lámina de caucho, sin romper ni pegar nada.
2. Obtenemos una **red plana** con los mismos V vértices y A aristas, y con $C-1$ regiones (la cara quitada se volvió el exterior).
3. Basta probar que en la red

   $$V - A + R = 1 \qquad (R = \text{número de regiones}),$$

   pues entonces $V - A + (C-1) = 1$, es decir, $V - A + C = 2$.



Cubo: $V = 8$, $A = 12$, $R = 5 \quad \Rightarrow \quad 8 - 12 + 5 = 1.$

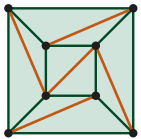
Demostración del teorema de Euler (método de Cauchy)

Pasos 2 y 3: triangular y desarmar sin cambiar $V - A + R$

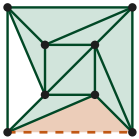
4. **Triangular.** Trazamos diagonales en cada región no triangular. Cada diagonal suma *una arista y una región*: $V - A + R$ no cambia.
5. **Quitar triángulos del borde** , uno a uno:
   - si el triángulo tiene *una* arista en el borde: se pierde 1 arista y 1 región;
   - si tiene *dos*: se pierden 2 aristas, 1 vértice y 1 región.

   En ambos casos $V - A + R$ no cambia.
6. **Al final** queda un solo triángulo: $3 - 3 + 1 = 1$.

Luego $V - A + R = 1$ en la red, y $V - A + C = 2$ en el poliedro. ■



$8 - 17 + 10 = 1$

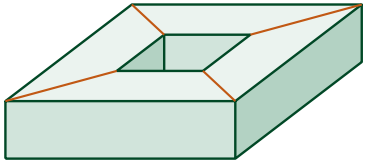


se quita $\overline{o_1 o_2}$



al final: $3 - 3 + 1 = 1$

¿Siempre vale $V - A + C = 2$? Un contraejemplo



Un «marco» (poliedro con un agujero), con las caras superior e inferior divididas en cuadriláteros.

Contemos:

- $V = 16$ (8 arriba, 8 abajo);
- $C = 16$ (4 externas, 4 internas, 4 arriba, 4 abajo);
- $A = 32$ (8 verticales, 16 de los cuadrados, 8 diagonales).

$$V - A + C = 16 - 32 + 16 = \mathbf{0} \neq 2.$$

Observación. El teorema exige que el poliedro sea **convexo** (o, más en general, que «no tenga agujeros»). El número $V - A + C$ es la *característica de Euler* y cuenta los agujeros.

Euler y los poliedros regulares

Una segunda prueba de que hay solo cinco, y el cálculo de V, A y C

En un poliedro regular con caras de n lados y m caras por vértice:

- cada arista está en 2 caras: $nC = 2A$;
- cada arista tiene 2 vértices: $mV = 2A$.

Sustituyendo $C = \frac{2A}{n}$ y $V = \frac{2A}{m}$ en $V - A + C = 2$:

$$\frac{2A}{m} - A + \frac{2A}{n} = 2 \implies \boxed{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A}}$$

Como $\frac{1}{A} > 0$, necesitamos $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$, que de nuevo da solo las cinco parejas (n, m).

Ejemplo (icosaedro: $n = 3$, $m = 5$).

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{8}{15} = \frac{1}{2} + \frac{1}{30} \Rightarrow A = 30.$$

Entonces $C = \dfrac{2 \cdot 30}{3} = 20$ y $V = \dfrac{2 \cdot 30}{5} = 12$.

Ejemplo (dodecaedro: $n = 5$, $m = 3$). $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{30}$, luego $A = 30$, $C = 12$, $V = 20$.

Ángulos internos de un poliedro

Teorema 5 (suma de los ángulos de las caras)

En un poliedro convexo con V vértices, la suma de los ángulos interiores de todas sus caras es $S = 360^\circ\,(V-2)$.

Prueba. Sean $n_1, \ldots, n_C$ los números de lados de las caras. Una cara de n_i lados aporta $(n_i - 2)180^\circ$:

$$S = \sum_{i=1}^{C} (n_i - 2)180^\circ = 180^\circ \Big(\sum n_i - 2C \Big).$$

Cada arista es lado de dos caras, así que $\sum n_i = 2A$:

$$S = 180^\circ(2A - 2C) = 360^\circ(A - C) = 360^\circ(V - 2),$$

usando Euler: $A - C = V - 2$. ■

Ejemplo (verificación). **Cubo:** $6 \cdot 360^\circ = 2160^\circ$ y $360^\circ(8-2) = 2160^\circ$. ✓

Dodecaedro: $12 \cdot 540^\circ = 6480^\circ$ y $360^\circ(20-2) = 6480^\circ$. ✓

Curiosidad. Lo que «falta» para 360° en cada vértice, sumado en todos los vértices, da siempre 720° (Descartes).

Ejemplos de aplicación

Ejemplo (el balón de fútbol). Un balón tiene 12 caras pentagonales y 20 hexagonales, y en cada vértice concurren 3 caras. ¿Cuántas aristas y vértices tiene?

$$A = \frac{12 \cdot 5 + 20 \cdot 6}{2} = \frac{180}{2} = 90.$$

Por Euler: $V = 2 + A - C = 2 + 90 - 32 = 60$. **Verificación:** $3V = 2A \quad (180 = 180)$. ✓

Ejemplo (caras triangulares). Un poliedro convexo tiene solo caras triangulares y 12 vértices. ¿Cuántas caras y aristas tiene?

$$3C = 2A \Rightarrow A = \tfrac{3}{2}C, \qquad 12 - \tfrac{3}{2}C + C = 2.$$

Luego $\frac{1}{2}C = 10$: $C = 20$ y $A = 30$ (como el icosaedro). Suma de ángulos de las caras: $20 \cdot 180^\circ = 3600^\circ = 360^\circ(12 - 2)$. ✓

2.7.9

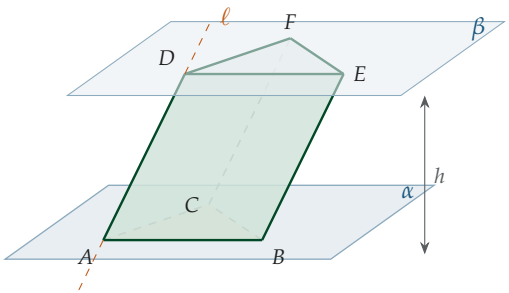
Prismas

Definición, elementos y clasificación; sección recta, sección transversal y área lateral.

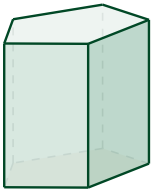
Definición de prisma

Definición. Sean $\alpha \parallel \beta$ dos planos, $\mathcal{P}$ una región poligonal en α y ℓ una recta que corta a α (no contenida en él). El **prisma** es la unión de todos los segmentos $\overline{XX'}$, con $X \in \mathcal{P}$, $X' \in \beta$ y $\overline{XX'} \parallel \ell$.

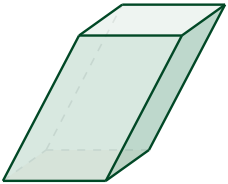
- **Bases**: $\mathcal{P}$ y su «copia» $\mathcal{P}'$ en β.
- **Aristas laterales**: $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$.
- **Caras laterales**: $ABED$, $BCFE$, $CADF$.
- **Altura** h: distancia entre α y β.



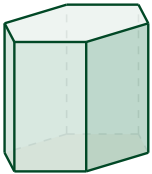
Clasificación de los prismas



Recto: las aristas laterales son perpendiculares a las bases (caras laterales rectangulares; altura = arista lateral).



Oblicuo: las aristas laterales no son perpendiculares a las bases (altura $<$ arista lateral).



Regular: es recto y sus bases son polígonos regulares.

Observación. Según el polígono de la base, el prisma es **triangular**, **cuadrangular**, **pentagonal**, **hexagonal**... Un prisma de base con n lados tiene $2n$ vértices, $3n$ aristas y $n+2$ caras $(2n - 3n + (n+2) = 2$, como predice Euler).

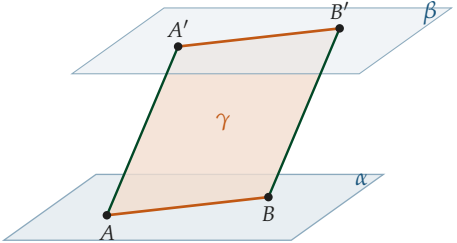
Un lema sobre planos paralelos

Lema

Los segmentos de rectas paralelas comprendidos entre dos planos paralelos son congruentes.

Prueba. Sean $\overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{BB'}$ con $A, B \in \alpha$ y $A', B' \in \beta$.

1. Dos rectas paralelas determinan un plano γ.
2. γ corta a los planos paralelos α y β en rectas paralelas (2.7.2): $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$.
3. $ABB'A'$ tiene sus lados opuestos paralelos: es un **paralelogramo**.
4. Los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes: $AA' = BB'$. ■



Propiedades fundamentales del prisma

Teorema 6

En todo prisma:

1. las aristas laterales son paralelas y congruentes;
2. las caras laterales son paralelogramos;
3. las bases son polígonos congruentes.

Prueba.

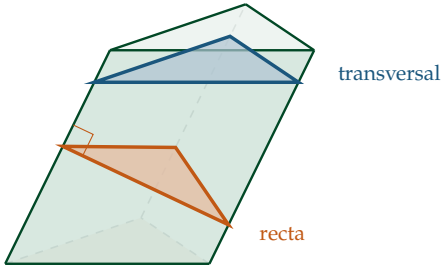
1. Las aristas laterales son paralelas a ℓ por definición, luego paralelas entre sí, y por el lema son congruentes.
2. En la cara $ABED$: $\overline{AD} \parallel \overline{BE}$ (aristas laterales) y $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ (el plano $ABED$ corta a $\alpha \parallel \beta$ en rectas paralelas). Es un paralelogramo.
3. Por (2), cada lado de la base superior es congruente con el correspondiente de la inferior: $DE = AB$, $EF = BC$, ... Lo mismo ocurre con las diagonales ($ACFD$ también es paralelogramo, así que $DF = AC$). Triangulando desde un vértice, los triángulos correspondientes son congruentes por **L-L-L**; por tanto las bases son congruentes. ■

Sección transversal y sección recta

Definición (sección transversal)**.** Intersección del prisma con un plano *paralelo a las bases*.

Definición (sección recta)**.** Intersección del prisma con un plano *perpendicular a las aristas laterales* que las corta a todas.

Observación. En un prisma **recto** ambas coinciden. En uno **oblicuo** son distintas: la sección recta es «más pequeña» y es la que permite calcular el área lateral.



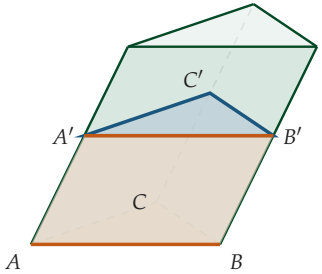
Las secciones transversales son congruentes con la base

Teorema 7

Toda sección transversal de un prisma es congruente con la base.

Prueba. Sea $\pi \parallel \alpha$ un plano que corta las aristas laterales en $A', B', C', \ldots$

1. π y α son paralelos y $\overline{AA'} \parallel \overline{BB'}$; por el lema, $ABB'A'$ es un paralelogramo y $A'B' = AB$.
2. Igual para cada lado y cada diagonal: $B'C' = BC$, $A'C' = AC$, ...
3. Los triángulos de una triangulación de la sección son congruentes (**L-L-L**) a los de la base. ■



$ABB'A'$ es un paralelogramo.

Área lateral de un prisma

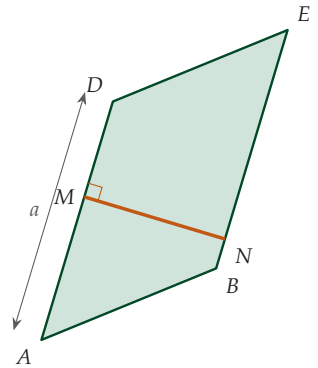
Teorema 8 (área lateral)

El área lateral de un prisma es el producto del perímetro $p_\perp$ de una sección recta por la longitud a de una arista lateral:

$$A_L = p_\perp \cdot a.$$

Prueba. Cada cara lateral es un paralelogramo de base a (una arista lateral). El plano de la sección recta es perpendicular a las aristas laterales, así que el lado $\overline{MN}$ de la sección que está en esa cara es perpendicular a $\overline{AD}$ y a $\overline{BE}$: MN es la **altura** del paralelogramo.

$$A_L = a\,MN + a\,NP + a\,PM = a\,p_\perp. \qquad \blacksquare$$



Una cara lateral: base a y altura MN.

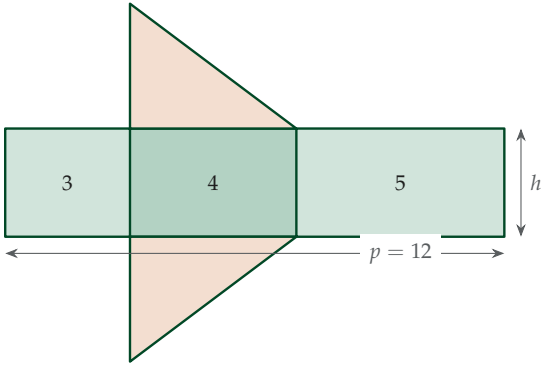
Prisma recto: área lateral y total

Corolario

En un prisma recto de altura h y base de perímetro p y área B:

$$A_L = p \cdot h, \qquad A_T = A_L + 2B.$$

¿Por qué? En el prisma recto la base *es* una sección recta y la arista lateral mide h. El **desarrollo plano** lo hace evidente: las caras laterales forman un rectángulo de base p y altura h.



Desarrollo de un prisma recto de base 3-4-5.

Ejemplo. Prisma recto de base triangular 3-4-5 y altura $h = 8$: $A_L = 12 \cdot 8 = 96$, $B = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$, $A_T = 96 + 2 \cdot 6 = 108$.

Ejemplos

Ejemplo (prisma hexagonal regular). Lado de la base 4 y altura 10. Halle A_L y A_T.

$$A_L = p\,h = (6 \cdot 4) \cdot 10 = 240.$$

La base es formada por 6 triángulos equiláteros de lado 4:

$$B = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\, 4^2 = 24\sqrt{3}.$$

$$A_T = 240 + 48\sqrt{3} \approx 323{,}1.$$

Ejemplo (prisma oblicuo). Las aristas laterales de un prisma oblicuo miden 10 y su sección recta es un triángulo de lados 5, 5 y 6. Halle el área lateral.

$$A_L = p_\perp \cdot a = (5 + 5 + 6) \cdot 10 = 160.$$

Ojo: no se usa el perímetro de la base, que en general es *mayor* que el de la sección recta.

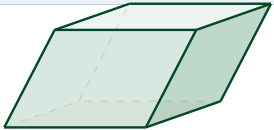
2.7.10

Paralelepípedos

Prismas cuyas bases son paralelogramos: caras opuestas, diagonales y el teorema de la diagonal del ortoedro.

Paralelepípedos: definición y clases

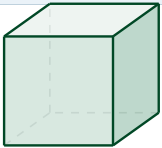
Definición. Un **paralelepípedo** es un prisma cuyas bases son paralelogramos. Entonces *sus seis caras* son paralelogramos (las laterales lo son en todo prisma).



Oblicuo: aristas laterales no perpendiculares a la base.



Rectangular (ortoedro): las seis caras son rectángulos.



Cubo: las seis caras son cuadrados congruentes.

Observación. También hay paralelepípedos **rectos** (aristas laterales perpendiculares a una base que es un paralelogramo cualquiera) y **romboedros** (seis caras rombos congruentes). Notación: $ABCD$ base inferior y $EFGH$ superior, con E, F, G, H sobre A, B, C, D.

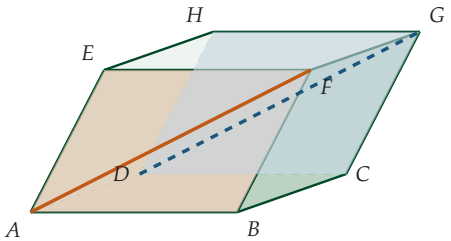
Caras opuestas

Teorema 9

En todo paralelepípedo las caras opuestas son paralelas y congruentes.

Prueba. Caras opuestas $ABFE$ y $DCGH$.

1. **Paralelas.** $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{AE} \parallel \overline{DH}$: dos rectas secantes de un plano son paralelas a dos del otro, luego los planos son paralelos.
2. **Congruentes.** $AB = DC$, $AE = DH$, $BF = CG$ (lados opuestos de paralelogramos), y $ADGF$ es paralelogramo ($\overline{AD} \parallel \overline{FG}$, $AD = FG$), así que $AF = DG$.
3. Por **L-L-L**, $\triangle ABF \cong \triangle DCG$ y $\triangle AFE \cong \triangle DGH$: $ABFE \cong DCGH$. ■



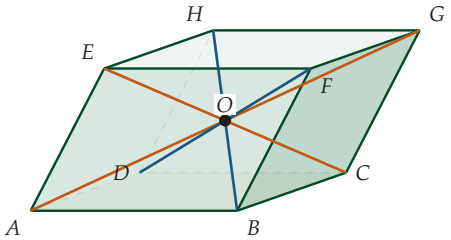
Las diagonales del paralelepípedo

Teorema 10

Las cuatro diagonales de un paralelepípedo se cortan en un punto O que es el punto medio de cada una de ellas.

Prueba.

1. $\overline{AE}$ y $\overline{CG}$ son paralelas y congruentes, así que $ACGE$ es un paralelogramo: $\overline{AG}$ y $\overline{CE}$ se cortan en el punto medio O de $\overline{AG}$.
2. Igual, $BDHF$ es paralelogramo: $\overline{BH}$ y $\overline{DF}$ se bisecan.
3. $\overline{AB} \parallel \overline{HG}$ y $AB = HG$: $ABGH$ es paralelogramo, luego el punto medio de $\overline{BH}$ es el de $\overline{AG}$, que es O. ■



O es el *centro de simetría* del paralelepípedo.

La diagonal del paralelepípedo rectangular

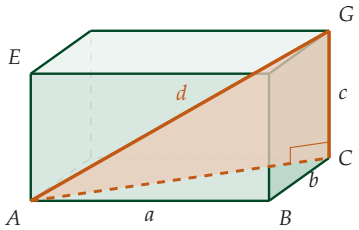
Teorema 11 (diagonal del ortoedro)

Si un paralelepípedo rectangular tiene dimensiones a, b, c, cada diagonal mide

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Prueba.

1. En la base, $\triangle ABC$ es rectángulo en B: $AC^2 = a^2 + b^2$ (Pitágoras).
2. $\overline{CG} \perp$ plano de la base, luego $\overline{CG} \perp \overline{AC}$.
3. En $\triangle ACG$, rectángulo en C: $AG^2 = AC^2 + CG^2 = a^2 + b^2 + c^2$. ■



Corolario

La diagonal de un cubo de arista a mide $a\sqrt{3}$.

Ejemplos

Ejemplo (una caja). Una caja de $3 \times 4 \times 12$ cm. ¿Cabe una varilla de 13,5 cm? ¿Cuál es su área total?

$$d = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}.$$

La varilla *no* cabe $(13{,}5 > 13)$.

$$A_T = 2(ab + bc + ca) = 192 \text{ cm}^2.$$

Ejemplo (un cubo). La diagonal de un cubo mide $6\sqrt{3}$. Halle su arista, su área total y la diagonal de una cara.

$$a\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \;\Rightarrow\; a = 6.$$

$$A_T = 6a^2 = 216, \qquad d_{\text{cara}} = a\sqrt{2} = 6\sqrt{2}.$$

Observe: $d^2 = d_{\text{cara}}^2 + a^2 = 72 + 36 = 108 = (6\sqrt{3})^2$. ✓

2.7.11

Pirámides

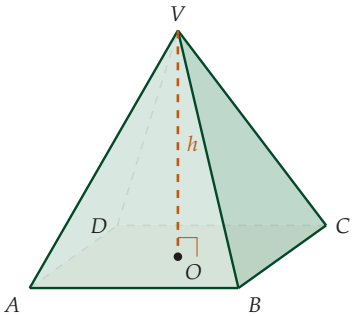
Elementos, pirámides regulares, área lateral y el teorema de las secciones paralelas a la base.

Definición de pirámide

Definición. Sean $\mathcal{P}$ una región poligonal en un plano α y V un punto fuera de α. La **pirámide** de base $\mathcal{P}$ y vértice V es la unión de todos los segmentos $\overline{VX}$ con $X \in \mathcal{P}$.

- **Vértice** (cúspide) V y **base** $\mathcal{P}$.
- **Caras laterales**: triángulos VAB, VBC, ...
- **Aristas laterales**: $\overline{VA}$, $\overline{VB}$, ...
- **Altura** $h = VO$: distancia de V al plano α (O es el pie de la perpendicular).

Según la base es triangular (tetraedro), cuadrangular, pentagonal... Con base de n lados: $V = n + 1$, $A = 2n$, $C = n + 1$.



Pirámide regular

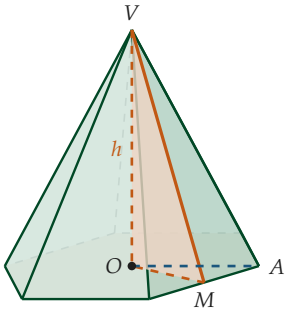
Definición. Una pirámide es **regular** si su base es un polígono regular y el pie O de su altura es el *centro* de la base.

- **Apotema de la pirámide** VM: altura de una cara lateral trazada desde V.
- **Apotema de la base** OM y **radio de la base** OA.

Hay tres triángulos rectángulos con vértice de ángulo recto en O:

$$VM^2 = h^2 + OM^2, \qquad VA^2 = h^2 + OA^2,$$

y, en la cara lateral, $VA^2 = VM^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$.



Pirámide hexagonal regular.

Propiedades de la pirámide regular

Teorema 12

En una pirámide regular: (1) las aristas laterales son congruentes; (2) las caras laterales son triángulos isósceles congruentes; (3) las apotemas de la pirámide son congruentes.

Prueba. Sea R el radio de la base.

1. $\overline{VO} \perp \alpha$, luego $\overline{VO} \perp \overline{OA_i}$ para todo i. Los triángulos VOA_i son rectángulos con catetos h y R: son congruentes (**L-A-L**) y $VA_1 = VA_2 = \cdots = VA_n$.
2. Cada cara VA_iA_{i+1} tiene $VA_i = VA_{i+1}$ (isósceles) y base $A_iA_{i+1} = l$ (lado del polígono regular). Por **L-L-L** todas las caras son congruentes.
3. En un triángulo isósceles la altura sobre la base es también mediana; las apotemas son alturas correspondientes de triángulos congruentes, luego son congruentes. Además M es el punto medio de $\overline{A_iA_{i+1}}$, y por Pitágoras en $\triangle VOM$: $VM^2 = h^2 + OM^2$. ■

Área lateral de la pirámide regular

Teorema 13 (área lateral)

Si una pirámide regular tiene base de perímetro p y apotema a_p, entonces

$$A_L = \frac{p \cdot a_p}{2}, \qquad A_T = A_L + B.$$

Prueba. Las n caras laterales son triángulos congruentes de base l y altura a_p:

$$A_L = n \cdot \frac{l\, a_p}{2} = \frac{(nl)\, a_p}{2} = \frac{p\, a_p}{2}. \quad \blacksquare$$

Ejemplo. Pirámide cuadrangular regular de lado 6 y altura 4.

- Apotema de la base: $OM = 3$.
- Apotema: $a_p = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.
- $A_L = \dfrac{24 \cdot 5}{2} = 60$,
  $A_T = 60 + 36 = 96$.
- Arista lateral: $\sqrt{a_p^2 + 3^2} = \sqrt{34}$.

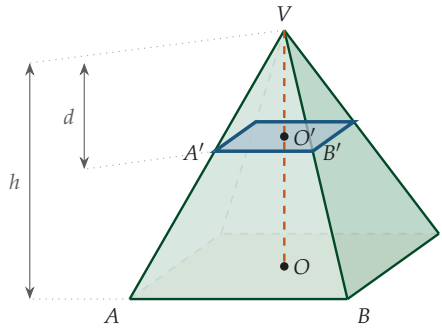
Secciones paralelas a la base

Teorema 14 (secciones paralelas)

Si un plano paralelo a la base corta una pirámide de altura h a una distancia d del vértice, entonces:

1. la sección es un polígono **semejante** a la base, con razón $k = \dfrac{d}{h}$;
2. $\dfrac{\text{área de la sección}}{\text{área de la base}} = \left(\dfrac{d}{h}\right)^2$.

Observación. Es el análogo del teorema de Thales: lo que en el plano es «proporcional», en las áreas se vuelve «proporcional al cuadrado».



Secciones paralelas a la base: demostración

Prueba. Sea $\pi \parallel \alpha$ el plano de corte; corta $\overline{VA}$, $\overline{VB}$, ... en A', B', ... y la altura $\overline{VO}$ en O', con $VO' = d$.

1. **Thales en el espacio (2.7.6).** Los planos paralelos π y α (junto con el plano paralelo por V) cortan segmentos proporcionales sobre las secantes $\overleftrightarrow{VA}$ y $\overleftrightarrow{VO}$:

$$\frac{VA'}{VA} = \frac{VO'}{VO} = \frac{d}{h} = k.$$

   Lo mismo para cada arista lateral: $\dfrac{VB'}{VB} = \dfrac{VC'}{VC} = \cdots = k$.

2. **Lados proporcionales.** El plano VAB corta a $\pi \parallel \alpha$ en rectas paralelas: $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$. Entonces $\triangle VA'B' \sim \triangle VAB$ (**A-A**) y $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{VA'}{VA} = k$. Igual con todos los lados y diagonales.

Secciones paralelas a la base: demostración (cont.)

Prueba.

3. **Semejanza.** Triangulando desde A, cada triángulo de la sección es semejante al de la base con razón k (**P-P-P**); así los ángulos son congruentes y los lados proporcionales: la sección es semejante a la base.
4. **Áreas.** La razón de las áreas de polígonos semejantes es el cuadrado de la razón de semejanza: $\dfrac{B'}{B} = k^2 = \dfrac{d^2}{h^2}$. ■

Consecuencia clave para el volumen

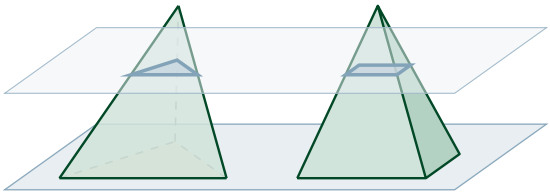
Corolario

Si dos pirámides tienen **bases de igual área** y **alturas iguales**, entonces sus secciones paralelas a la base, trazadas a la misma distancia d del vértice, tienen **áreas iguales**.

Prueba. Si $B_1 = B_2 = B$ y $h_1 = h_2 = h$, por el teorema anterior

$$B_1' = \left(\frac{d}{h}\right)^2 B_1 = \left(\frac{d}{h}\right)^2 B_2 = B_2'. \quad \blacksquare$$

Las bases pueden tener formas distintas (un triángulo y un cuadrado); solo importa su área. Esto, con el principio de Cavalieri, dará el volumen de la pirámide.



Bases de área 2,5 ambas y la misma altura.

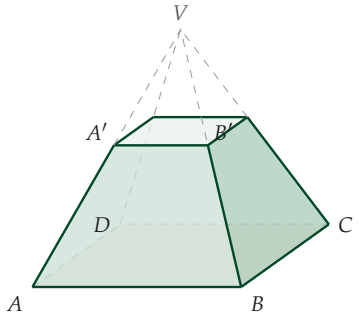
Tronco de pirámide

Definición. Un **tronco de pirámide** es la parte de una pirámide comprendida entre la base y una sección paralela a ella. Sus bases son semejantes y sus caras laterales son trapecios.

En el tronco de una pirámide regular las caras laterales son trapecios isósceles congruentes; su altura a_p es la **apotema del tronco**. Sumando las áreas de los trapecios:

$$A_L = n \cdot \frac{(l + l')}{2}\, a_p = \frac{(p + p')\, a_p}{2},$$

donde p y p' son los perímetros de las bases.



Se obtiene quitando la pirámide pequeña $V\text{-}A'B'C'D'$.

2.7.12

Volumen

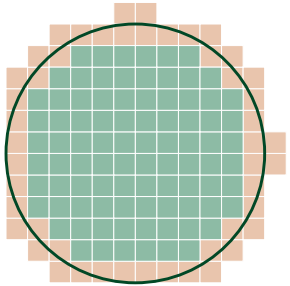
Conjuntos medibles en el espacio y postulados del volumen, incluido el principio de Cavalieri.

¿Qué sólidos tienen volumen?

Así como en el plano medimos áreas con cuadrados unitarios, en el espacio medimos volúmenes con **cubos unitarios**.

> **Definición** (conjunto medible)**.** Un sólido S es **medible** si puede aproximarse tanto como se quiera *por dentro* y *por fuera* mediante uniones finitas de cajas (paralelepípedos rectangulares), de modo que la diferencia entre los volúmenes de ambas aproximaciones se haga tan pequeña como se desee.

Admitiremos que los poliedros, cilindros, conos y esferas son medibles.



Analogía en el plano:
■ aproximación interior, ■ lo que se añade para cubrir.

Al refinar la malla, ambas se acercan.

Postulados del volumen

Postulado (V1: existencia)

A cada sólido medible S le corresponde un único número real positivo $\text{Vol}(S)$, su **volumen**.

Postulado (V2: congruencia)

Si dos sólidos son congruentes, tienen el mismo volumen.

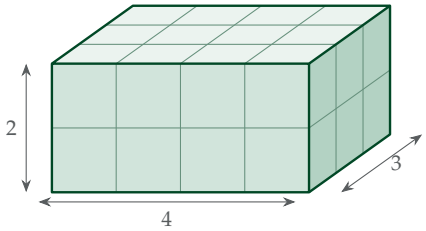
Postulado (V3: aditividad)

Si $S = S_1 \cup S_2$ y S_1, S_2 solo comparten puntos de su frontera, entonces $\text{Vol}(S) = \text{Vol}(S_1) + \text{Vol}(S_2)$.

Postulado (V4: unidad)

El volumen de un paralelepípedo rectangular de dimensiones a, b, c es abc. En particular, el cubo de arista 1 tiene volumen 1.

¿Por qué *abc*?



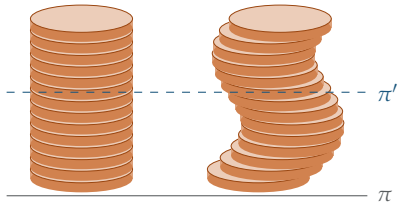
- Con dimensiones enteras, la caja se descompone en $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ cubos unitarios congruentes (V2) que solo comparten caras (V3): el volumen es 24.
- Con dimensiones racionales se usa un cubo de arista $\frac{1}{n}$; con dimensiones reales, aproximaciones racionales.
- Por eso el postulado V4 es la elección natural: *mide cuántos cubos unitarios caben*.

El principio de Cavalieri

Postulado (V5: principio de Cavalieri)

Sean S_1 y S_2 dos sólidos y π un plano. Si todo plano paralelo a π que corta a uno de ellos corta también al otro, y las dos secciones obtenidas tienen **la misma área**, entonces

$$\text{Vol}(S_1) = \text{Vol}(S_2).$$



Intuición. Dos pilas con las mismas monedas: una recta y otra torcida. A cualquier altura, el corte es un disco (una moneda) de la misma área. Ambas pilas tienen el mismo volumen: el de las monedas.

Bonaventura Cavalieri (1598–1647), discípulo de Galileo.

2.7.13

Aplicaciones de Cavalieri

Volumen del prisma, de la pirámide, del cilindro y del cono. Área superficial del cono.

Volumen del prisma

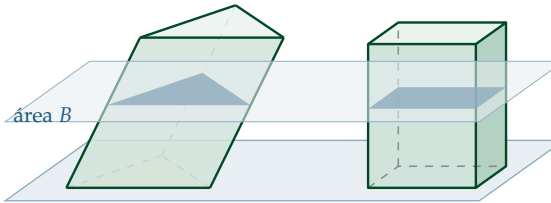
Teorema 15 (volumen del prisma)

El volumen de un prisma es el producto del área de su base por su altura:

$$V = B \cdot h.$$

Prueba. Ponemos sobre un plano α el prisma y una caja con base de área B y altura h.

1. Todo plano paralelo a α que corta a uno corta al otro (igual altura).
2. Ambas secciones tienen área B: la del prisma es congruente con su base (2.7.9) y la de la caja es un rectángulo de área B.
3. Por Cavalieri, $V_{\text{prisma}} = V_{\text{caja}} = B\,h$ (postulado V4). ■



Secciones de igual área a toda altura.

Volumen del paralelepípedo: ejemplos

Corolario

El volumen de cualquier paralelepípedo (incluso oblicuo) es $V = B\,h$, donde B es el área de una base y h la altura correspondiente. Para el cubo de arista a, $V = a^3$.

Ejemplo (prisma hexagonal). Prisma regular hexagonal de lado 4 y altura 10:

$$V = B\,h = 24\sqrt{3}\cdot 10 = 240\sqrt{3} \approx 415{,}7.$$

Ejemplo (paralelepípedo oblicuo). La base es un rombo de diagonales 6 y 8; las aristas laterales miden 10 y forman 60° con la base.

$$B = \tfrac{6\cdot 8}{2} = 24, \qquad h = 10\,\operatorname{sen} 60^\circ = 5\sqrt{3},$$

$$V = 24\cdot 5\sqrt{3} = 120\sqrt{3}.$$

Hacia el volumen de la pirámide: dos lemas

Lema (1)

Dos pirámides con bases de igual área y alturas iguales tienen el mismo volumen.

Prueba. Se colocan con las bases en un mismo plano. Por el corolario de las secciones paralelas (2.7.11), a cada distancia d de los vértices las secciones tienen áreas iguales a $\left(\frac{d}{h}\right)^2 B$. Por Cavalieri, los volúmenes son iguales. ■

Lema (2)

Todo prisma triangular se descompone en tres pirámides triangulares (tetraedros) de igual volumen.

La demostración está en la siguiente diapositiva.

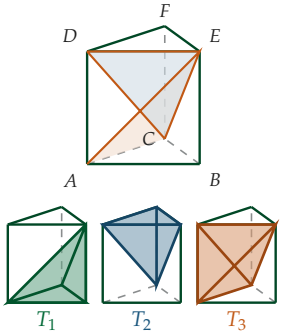
Lema 2: el prisma triangular en tres pirámides

Prueba. Prisma ABC-DEF (D, E, F sobre A, B, C). Los planos ACE y CDE lo dividen en

$$T_1 = ABCE, \quad T_2 = CDEF, \quad T_3 = ACDE.$$

- T_1, T_2: bases $ABC \cong DEF$ y la altura h del prisma. **Lema 1**: $V_1 = V_2$.
- T_1, T_3: con vértice C, sus bases ABE y ADE son las mitades del paralelogramo $ABED$ (diagonal $\overline{AE}$) y tienen la misma altura. **Lema 1**: $V_1 = V_3$.

Luego $V_1 = V_2 = V_3 = \frac{1}{3} V_{\text{prisma}} = \frac{1}{3} Bh$. ■



Volumen de la pirámide

Teorema 16 (volumen de la pirámide)

El volumen de una pirámide de base de área B y altura h es

$$V = \frac{1}{3} B\, h.$$

Prueba.

1. **Pirámide triangular.** Completamos un prisma triangular con la misma base y altura; por el Lema 2 la pirámide es un tercio: $V = \frac{1}{3}Bh$.
2. **Pirámide cualquiera.** Tomamos una pirámide triangular con base de área B y altura h. Por el Lema 1 ambas tienen igual volumen: $V = \frac{1}{3}Bh$. ■

Ejemplo. Pirámide cuadrangular regular de lado 6 y altura 4:

$$V = \tfrac{1}{3} \cdot 36 \cdot 4 = 48.$$

Ejemplo (tetraedro regular). Arista a: el pie de la altura dista $\frac{a}{\sqrt{3}}$ de cada vértice, así que $h = a\sqrt{\frac{2}{3}}$ y

$$V = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{4} a^2 \cdot a\sqrt{\tfrac{2}{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

El cilindro

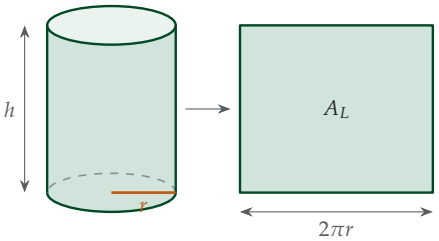
Definición. Un **cilindro circular** se define como el prisma, pero con un círculo como base. Es **recto** si sus generatrices son perpendiculares a la base.

Teorema 17 (cilindro)

Un cilindro de radio r y altura h tiene

$$V = \pi r^2 h, \qquad A_L = 2\pi r h \quad \text{(si es recto)}.$$

Prueba. **Volumen:** las secciones paralelas a la base son círculos de área πr^2, igual que las de un prisma de base de área πr^2 y altura h; por Cavalieri, $V = \pi r^2 h$. **Área lateral:** al desenrollarla se obtiene un rectángulo de lados $2\pi r$ y h. ■



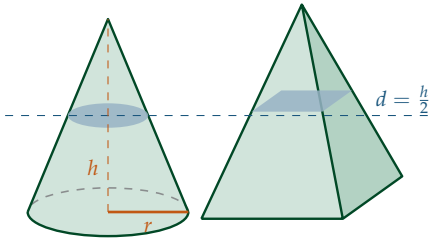
Volumen del cono

Definición. El **cono circular** se define como la pirámide, con un círculo como base. Es **recto** si el pie de la altura es el centro; su **generatriz** mide $g = \sqrt{h^2 + r^2}$.

Teorema 18 (volumen del cono)

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Prueba. A distancia d del vértice la sección es un círculo de radio $r\,\frac{d}{h}$ (triángulos semejantes) y área $\pi r^2 \frac{d^2}{h^2}$. Una pirámide de base πr^2 y altura h tiene, a esa distancia, secciones de la misma área (2.7.11). Por Cavalieri, $V_{\text{cono}} = V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. ■



Base de la pirámide: cuadrado de área πr^2.

Área superficial del cono

Teorema 19 (área lateral del cono recto)

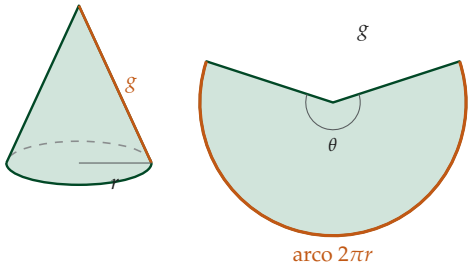
Un cono recto de radio r y generatriz g tiene

$$A_L = \pi r g, \qquad A_T = \pi r(g + r).$$

Prueba. Cortando por una generatriz y desenrollando, la superficie lateral es un **sector circular** de radio g cuyo arco mide $2\pi r$ (la circunferencia de la base). El área de un sector es proporcional a su arco:

$$\frac{A_L}{\pi g^2} = \frac{2\pi r}{2\pi g} \implies A_L = \pi g^2 \cdot \frac{r}{g} = \pi r g. \qquad \blacksquare$$

El ángulo del sector es $\theta = \dfrac{r}{g} \cdot 360°$.



Para $r = 3$, $g = 5$: $\theta = 216°$.

Ejemplos: cilindro y cono

Ejemplo (cono). Cono recto de radio 3 y altura 4.

$g = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5, \qquad V = \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 4 = 12\pi,$

$A_L = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi, \qquad A_T = 15\pi + 9\pi = 24\pi.$

Ejemplo (un vaso). Un vaso cilíndrico tiene diámetro 8 cm y altura 12 cm. ¿Cuántos conos de helado de radio 2 cm y altura 6 cm se llenan con él?

$V_{\text{vaso}} = \pi \cdot 4^2 \cdot 12 = 192\pi, \quad V_{\text{cono}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 4 \cdot 6 = 8\pi.$

Se llenan $\dfrac{192\pi}{8\pi} = 24$ conos.

Observación. Cilindro y cono con la misma base y altura: $V_{\text{cono}} = \frac{1}{3} V_{\text{cilindro}}$, igual que pirámide y prisma.

2.7.14

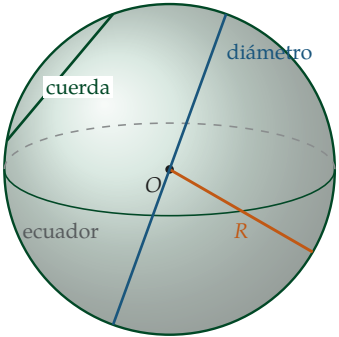
La esfera

Definición y elementos, secciones planas, plano tangente, volumen y área superficial.

La esfera: definición y elementos

Definición. Dados un punto O y un número $R > 0$, la **esfera** de centro O y radio R es el conjunto de puntos P del espacio tales que $OP = R$. La **bola** es el sólido formado por los puntos con $OP \leq R$.

- **Radio**: segmento del centro a un punto de la esfera.
- **Cuerda**: segmento que une dos puntos de la esfera; **diámetro**: cuerda que pasa por O.
- **Círculo máximo**: intersección con un plano que pasa por O (su radio es R, como el ecuador).

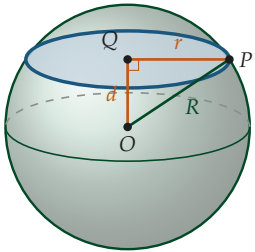


Secciones planas de la esfera

Teorema 20 (sección plana)

Sea π un plano a distancia d del centro O de una esfera de radio R, y Q el pie de la perpendicular de O a π.

1. Si $d < R$: circunferencia de centro Q y radio $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.
2. Si $d = R$: solo el punto Q (π es **tangente**).
3. Si $d > R$: no hay intersección.



Prueba. Sea $P \in \pi$. Como $\overline{OQ} \perp \pi$, el triángulo OQP es rectángulo en Q: $OP^2 = d^2 + QP^2$. Así, P está en la esfera $\iff OP = R \iff QP^2 = R^2 - d^2$: si $d < R$, es la circunferencia de centro Q y radio $\sqrt{R^2 - d^2}$; si $d = R$, solo $P = Q$; si $d > R$, ningún punto. ■

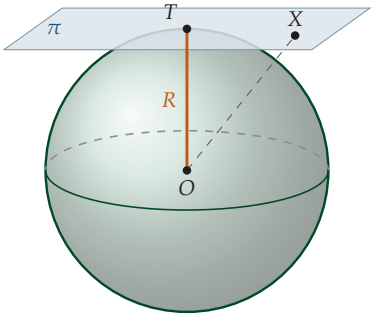
Plano tangente

Teorema 21 (plano tangente)

Un plano es tangente a la esfera en el punto T si y solo si es perpendicular al radio $\overline{OT}$ en T.

Prueba. ($\Leftarrow$) Sea $\pi \perp \overline{OT}$ en T y $X \in \pi$, $X \neq T$. Por el teorema de las oblicuas (2.7.5), la perpendicular es más corta que cualquier oblicua: $OX > OT = R$. Así X está fuera de la esfera y $\pi \cap$ esfera $= \{T\}$.

($\Rightarrow$) Si π es tangente en T, la distancia de O a π es R (teorema anterior, caso 2) y el pie de la perpendicular es el único punto común, T. Luego $\overline{OT} \perp \pi$. ■



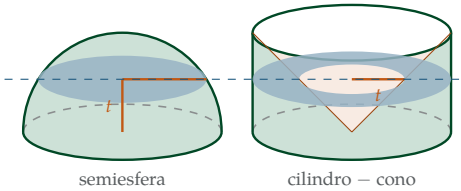
$OX > OT$: todo punto del plano, salvo T, queda fuera.

El volumen de la esfera (Arquímedes)

Teorema 22 (volumen de la esfera)

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Idea de Arquímedes. Comparar la **semiesfera** de radio R con un cilindro de radio R y altura R al que se le quita un cono con vértice en el centro de su base inferior (el «anticono»).



Prueba. Cortemos ambos sólidos con un plano a altura t $(0 \le t \le R)$.

- **Semiesfera:** círculo de radio $\sqrt{R^2 - t^2}$ (sección plana); área $\pi(R^2 - t^2)$.
- **Anticono:** corona entre radios R y t (el cono tiene radio igual a su altura, pues $r = h = R$); área $\pi R^2 - \pi t^2 = \pi(R^2 - t^2)$.

Por Cavalieri, $V_{\text{semiesfera}} = \pi R^2 \cdot R - \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R = \frac{2}{3}\pi R^3$, y la esfera completa tiene $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. ■

El área de la esfera

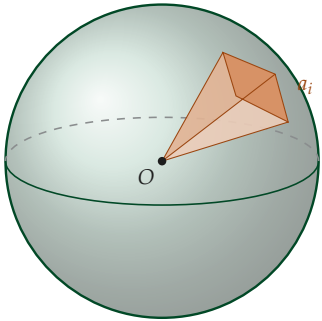
Teorema 23 (área superficial)

$$A = 4\pi R^2.$$

Argumento (no es una prueba rigurosa). Dividimos la superficie en muchas regiones pequeñas de áreas $a_1, \ldots, a_n$ y unimos cada una con el centro. Obtenemos «casi pirámides» de altura R:

$$\tfrac{4}{3}\pi R^3 = V \approx \sum \tfrac{1}{3}\, a_i\, R = \tfrac{1}{3}\, R\, A.$$

Al refinar la división la aproximación es exacta, y $A = \dfrac{3V}{R} = 4\pi R^2$.



Arquímedes: el área de la esfera es igual al área lateral del cilindro circunscrito, $2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2$.

Ejemplos

Ejemplo (un balón). Un balón de fútbol tiene un diámetro de 22 cm.

$$A = 4\pi(11)^2 = 484\pi \approx 1520{,}5 \text{ cm}^2,$$

$$V = \tfrac{4}{3}\pi(11)^3 = \tfrac{5324}{3}\pi \approx 5575{,}3 \text{ cm}^3.$$

Ejemplo (si el radio se duplica). El área se multiplica por $2^2 = 4$ y el volumen por $2^3 = 8$.

Ejemplo (esfera inscrita en un cilindro). Una esfera de radio R está inscrita en un cilindro (altura $2R$).

$$\frac{V_{\text{esfera}}}{V_{\text{cilindro}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\pi R^2 \cdot 2R} = \frac{2}{3}.$$

Arquímedes pidió que en su tumba se grabara esta figura.

Ejemplo (sección). Una esfera de radio 13 se corta con un plano a distancia 5 del centro. La sección es un círculo de radio $\sqrt{169 - 25} = 12$ y área 144π.

Resumen de fórmulas

Sólido	**Área lateral**	**Volumen**	**Clave de la prueba**
Prisma	$p_\perp\, a$ (recto: $p\,h$)	$B\,h$	Cavalieri con una caja
Paralelepípedo rectangular	$2(ab+bc+ca)$ (total)	abc	Postulado V4
Pirámide regular	$\frac{1}{2}\,p\,a_p$	$\frac{1}{3}B\,h$	3 pirámides en un prisma
Cilindro recto	$2\pi rh$	$\pi r^2 h$	Cavalieri con un prisma
Cono recto	πrg	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$	Cavalieri con una pirámide
Esfera	$4\pi R^2$	$\frac{4}{3}\pi R^3$	semiesfera y anticono

Y para todo poliedro convexo: $V - A + C = 2$ (Euler).

¡Gracias!

Geometría Básica · Instituto de Matemáticas · Universidad de Antioquia