UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

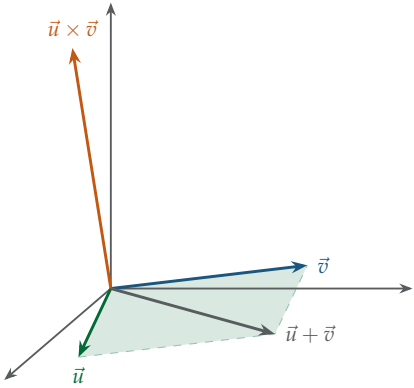
Instituto de Matemáticas
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Geometría Básica · Capítulo 4

Geometría Vectorial

Vectores, producto interno, producto vectorial y aplicaciones

Temas 4.1 – 4.29 del contenido detallado



Santiago Alzate Suárez
Semestre 2026-2

Hoja de ruta

4.1–4.5 Segmentos dirigidos, equipolencia, vector libre y norma.

4.6–4.11 Producto por escalar, suma, ecuación vectorial de la recta, colinealidad, combinación lineal y base en el plano.

4.12–4.15 Ángulo, producto interno, propiedades, proyección ortogonal y ortonormalidad.

4.16–4.23 Vectores en el espacio: colinealidad, coplanaridad, independencia lineal, bases, base canónica y cosenos directores.

4.24–4.27 Producto vectorial, producto mixto y triple producto vectorial.

4.28–4.29 Ecuación vectorial del plano; trabajo y torque.

La idea del capítulo. En Geometría Analítica usamos coordenadas de *puntos*. Ahora el objeto central es el **vector**: lo que tienen en común todos los segmentos con la misma magnitud, dirección y sentido. Sobre él construiremos un álgebra que codifica longitudes, ángulos, áreas y volúmenes.

Notación. Vectores: $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$; norma: $\|\vec{u}\|$; base canónica: $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$.

4.1–4.5

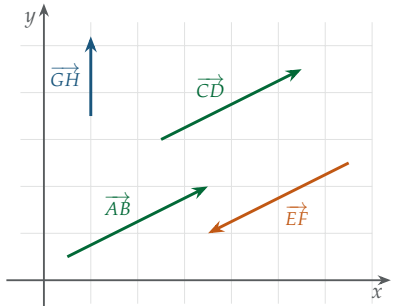
Vectores

Magnitud, dirección y sentido; equipolencia como relación de equivalencia; vector libre y su norma.

Definición. Un **segmento dirigido** $\overrightarrow{AB}$ es un segmento con un orden: A es el **origen** y B el **extremo**. Tiene

- **magnitud**: la longitud AB;
- **dirección**: la de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ (rectas paralelas tienen la misma dirección);
- **sentido**: de A hacia B.

Dos segmentos dirigidos paralelos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ tienen el mismo sentido si $D - C = \lambda(B - A)$ con $\lambda > 0$ (3.8); sentido contrario si $\lambda < 0$.

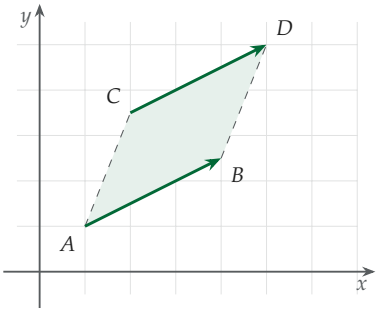


$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$: misma magnitud, dirección y sentido.
$\overrightarrow{EF}$: misma dirección, sentido contrario.
$\overrightarrow{GH}$: otra dirección.

Teorema 1

Si $\overrightarrow{CD}$ se obtiene transportando $\overrightarrow{AB}$ al punto C, es decir $D = C + (B - A)$, entonces $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ tienen la misma magnitud, dirección y sentido. Recíprocamente, si tienen la misma magnitud, dirección y sentido, $D = C + (B - A)$.

Prueba. ($\Rightarrow$) $D - C = B - A$: misma dirección y sentido ($\lambda = 1$, 3.8) y, por la fórmula de distancia, la misma magnitud. ($\Leftarrow$) Misma dirección y sentido: $D - C = \lambda(B - A)$ con $\lambda > 0$. Misma magnitud: $\lambda\, AB = AB$, luego $\lambda = 1$. ■



ABDC es un paralelogramo (3.7).

Definición. $\overrightarrow{AB}$ es **equipolente** a $\overrightarrow{CD}$, y escribimos $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, si tienen la misma magnitud, dirección y sentido; equivalentemente (4.2), $D - C = B - A$, o bien: los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ tienen el mismo punto medio.

Teorema 2

La equipolencia es una relación de equivalencia en el conjunto de segmentos dirigidos.

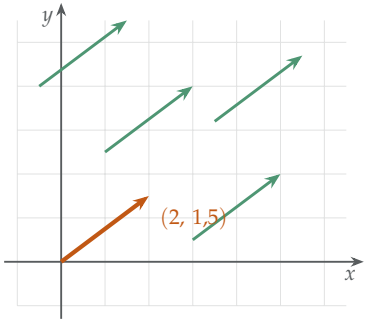
Prueba.

1. **Reflexiva:** $B - A = B - A$, luego $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$.
2. **Simétrica:** si $D - C = B - A$, entonces $B - A = D - C$: $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$.
3. **Transitiva:** si $D - C = B - A$ y $F - E = D - C$, entonces $F - E = B - A$: $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$. ■

Observación. Sin coordenadas, la transitividad dice: si $ABDC$ y $CDFE$ son paralelogramos, también $ABFE$ lo es (con los casos colineales aparte).

Definición. El **vector** $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ es la **clase de equivalencia** de $\overrightarrow{AB}$ por la equipolencia: el conjunto de todos los segmentos dirigidos equipolentes a él. Cada uno es un **representante** de $\vec{u}$.

- Cada vector tiene un único representante con origen en O: el que termina en $B - A$. Por eso escribimos $\vec{u} = (u_1, u_2)$ o (u_1, u_2, u_3), con $u_i = b_i - a_i$ (**componentes**).
- Por cada punto P pasa exactamente un representante de $\vec{u}$: el que termina en $P + \vec{u}$.
- El **vector nulo** $\vec{0}$ es la clase de los segmentos $\overrightarrow{AA}$.



Algunos representantes del mismo vector; en naranja, el que sale del origen.

Definición. La **norma** (módulo o longitud) de $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ es $\|\vec{u}\| = AB$.

Teorema 3

La norma no depende del representante, y

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \quad \text{o} \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

Prueba. Si $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, entonces $D - C = B - A = (u_1, u_2, u_3)$, y por la fórmula de distancia

$$CD = \sqrt{\sum (d_i - c_i)^2} = \sqrt{\sum u_i^2} = AB. \quad \blacksquare$$

Ejemplo. $A = (1, -2, 4)$, $B = (3, 1, -2)$:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (2, 3, -6),$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7.$$

Observación. $\|\vec{u}\| \geq 0$, y $\|\vec{u}\| = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$. Un vector de norma 1 se llama **unitario**.

4.6–4.11

Operaciones con vectores

Producto por escalar, suma, propiedades, ecuación vectorial de la recta, colinealidad, combinación lineal y base.

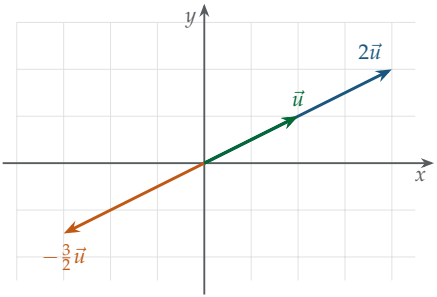
Definición. Para $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$: $\lambda\vec{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)$.

Teorema 4 (interpretación geométrica)

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ y $\lambda \neq 0$: $\lambda\vec{u}$ tiene la **dirección** de $\vec{u}$, **norma** $|\lambda|\,\|\vec{u}\|$ y el **mismo sentido** si $\lambda > 0$, **contrario** si $\lambda < 0$.

Prueba. Dirección y sentido: criterio 3.8 con el factor λ. Norma: $\sqrt{\sum(\lambda u_i)^2} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{\sum u_i^2} = |\lambda|\,\|\vec{u}\|$. ■

Propiedades: $1\vec{u} = \vec{u}$, $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$, $(\lambda+\mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$, $\lambda(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$.



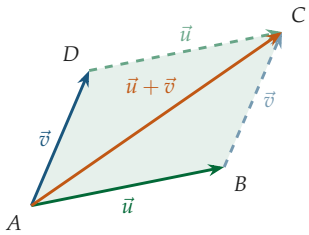
El vector **unitario** en la dirección de $\vec{u}$ es $\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$.

Definición (regla del triángulo). Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ (el origen de $\vec{v}$ en el extremo de $\vec{u}$), entonces $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$. En componentes: $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$.

Teorema 5 (regla del paralelogramo)

Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ tienen el mismo origen, entonces $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$, donde $ABCD$ es el paralelogramo de lados $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$.

Prueba. Sea $C = B + \vec{v}$. Como $\overrightarrow{BC} \sim \overrightarrow{AD}$, $ABCD$ es un paralelogramo (4.2), y por la regla del triángulo $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. ■



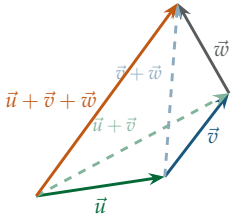
La diagonal del paralelogramo es la suma.
Restar: $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = \overrightarrow{DB}$.

Teorema 6

Para todos los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$:

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (conmutativa)
2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (asociativa)
3. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ (neutro)
4. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ (opuesto)

Prueba. En componentes se reducen a las propiedades de los números reales; por ejemplo, $u_i + v_i = v_i + u_i$ para cada i. **Geométricamente**, la conmutativa es la regla del paralelogramo: por los dos caminos ($\vec{u}$ y luego $\vec{v}$, o $\vec{v}$ y luego $\vec{u}$) se llega a C. La asociativa es la regla del triángulo aplicada dos veces: $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$. ■



Asociatividad: ambos caminos llevan de A a D.

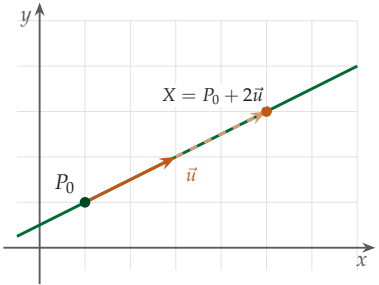
Teorema 7

La recta que pasa por P_0 con vector director $\vec{u} \neq \vec{0}$ es el conjunto de puntos

$$X = P_0 + t\,\vec{u}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

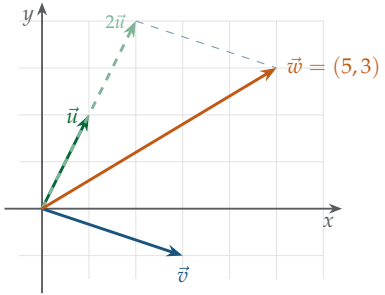
Prueba. X está en la recta $\iff$ $X = P_0$ o $\overrightarrow{P_0X}$ es paralelo a $\vec{u}$ $\iff$ $\overrightarrow{P_0X} = t\vec{u}$ para algún t (producto por escalar, 4.6). ■

Escribiendo $X = (x, y, z)$ en componentes se recuperan las ecuaciones paramétricas de 3.9 y 3.24. Con $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ y $t \in [0, 1]$ se obtiene el segmento $\overline{AB}$.



Definición. $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son **colineales** (paralelos) si uno es múltiplo del otro. Son **linealmente independientes** si no son colineales; es decir, si $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$ implica $\alpha = \beta = 0$.

Definición. Una **combinación lineal** de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es un vector $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$. Dos vectores forman una **base** del plano si todo vector se escribe de *manera única* como combinación lineal de ellos.



$\vec{w} = 2\vec{u} + 1\vec{v}$ con $\vec{u} = (1,2)$, $\vec{v} = (3,-1)$.

Teorema 8 (base del plano)

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son colineales, todo vector $\vec{w}$ del plano se escribe de manera única como $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

Prueba. $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ equivale al sistema

$$\begin{cases} u_1\alpha + v_1\beta = w_1 \\ u_2\alpha + v_2\beta = w_2 \end{cases}$$

cuyo determinante es $u_1v_2 - u_2v_1$. Como $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son colineales, $u_1v_2 - u_2v_1 \neq 0$ (3.8), y el sistema tiene **solución única**. ■

Geométricamente. Por el extremo de $\vec{w}$ se trazan paralelas a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$; los puntos de corte con las rectas de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dan $\alpha\vec{u}$ y $\beta\vec{v}$.

Ejemplo. $\vec{w} = (5,3)$, $\vec{u} = (1,2)$, $\vec{v} = (3,-1)$: $\alpha + 3\beta = 5$, $2\alpha - \beta = 3$, de donde $\alpha = 2$, $\beta = 1$.

4.12–4.15

Producto interno

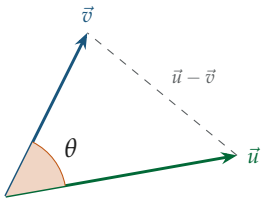
Ángulo entre vectores, producto interno y coordenadas, propiedades, proyección ortogonal, ortogonalidad y ortonormalidad.

Definición. El **ángulo** entre $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ es el ángulo $\theta \in [0°, 180°]$ entre sus representantes con origen común.

Definición (producto interno).

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta,$$

y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si alguno es $\vec{0}$. Es un **número** (escalar).



- $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$: ángulo agudo; < 0: obtuso; $= 0$: recto.
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ (pues $\theta = 0°$).

Teorema 9

Si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

(en el plano, $u_1 v_1 + u_2 v_2$).

Prueba. Con origen común, en el triángulo de lados $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$, la **ley del coseno** da

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta.$$

En componentes, $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \sum (u_i - v_i)^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\sum u_i v_i$. Comparando: $\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta = \sum u_i v_i$. ■

Ejemplo. $\vec{u} = (1,1,0)$, $\vec{v} = (0,1,1)$:

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2},$$

luego $\theta = 60°$.

Observación. Así se justifican los criterios de perpendicularidad (3.13, 3.26) y la fórmula del ángulo (3.14): ahora todo es $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Teorema 10

Para todos $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;
2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$;
3. $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$;
4. $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$, y $= 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$.

Prueba. Todas se siguen de la fórmula en coordenadas; por ejemplo (2): $\sum u_i(v_i + w_i) = \sum u_i v_i + \sum u_i w_i$. ■

Teorema 11 (Cauchy–Schwarz y triangular)

$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ y $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

Prueba. La primera porque $|\cos\theta| \leq 1$. Para la segunda:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$\leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 = (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2.$$ ■

Es la desigualdad triangular de 2.2.13, ahora en lenguaje vectorial.

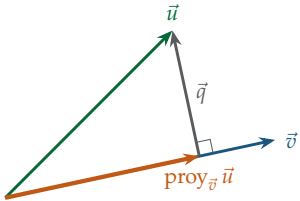
Teorema 12 (proyección)

Si $\vec{v} \neq \vec{0}$, el vector $\vec{u}$ se descompone de forma única como $\vec{u} = \vec{p} + \vec{q}$ con $\vec{p} \parallel \vec{v}$ y $\vec{q} \perp \vec{v}$, y

$$\vec{p} = \text{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\,\vec{v}.$$

Prueba. Buscamos $\vec{p} = \lambda\vec{v}$ con $(\vec{u} - \lambda\vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$. Por las propiedades: $\vec{u}\cdot\vec{v} - \lambda\|\vec{v}\|^2 = 0$, es decir $\lambda = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}$, único. ■

El número $\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \|\vec{u}\|\cos\theta$ es la **componente** de $\vec{u}$ en la dirección de $\vec{v}$.



Ejemplo. $\vec{u} = (4,3)$, $\vec{v} = (2,1)$: $\text{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \frac{11}{5}(2,1) = \left(\frac{22}{5}, \frac{11}{5}\right)$.

Definición. $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son **ortogonales** si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Son **ortonormales** si además son unitarios.

Teorema 13

Si $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ es ortonormal, es una base del plano y para todo $\vec{w}$:

$$\vec{w} = (\vec{w} \cdot \vec{e}_1)\,\vec{e}_1 + (\vec{w} \cdot \vec{e}_2)\,\vec{e}_2.$$

Prueba. Ortogonales no nulos no son colineales, luego forman base (4.11): $\vec{w} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2$. Multiplicando por $\vec{e}_1$: $\vec{w} \cdot \vec{e}_1 = \alpha\,\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + \beta\,\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 = \alpha$. Igual, $\beta = \vec{w} \cdot \vec{e}_2$. ■

Ejemplo. $\vec{e}_1 = \frac{1}{5}(3,4)$, $\vec{e}_2 = \frac{1}{5}(-4,3)$ son ortonormales (rotación de 90°, 3.5). Para $\vec{w} = (5,5)$:

$$\vec{w} \cdot \vec{e}_1 = 7, \qquad \vec{w} \cdot \vec{e}_2 = -1,$$

$$\vec{w} = 7\vec{e}_1 - \vec{e}_2.$$

Verificación: $\frac{1}{5}(21+4,\ 28-3) = (5,5)$. ✓

4.16–4.23

Vectores en el espacio

Colinealidad, vectores coplanares, independencia lineal, bases, base ortonormal y canónica, cosenos directores.

Teorema 14

(1) $\vec{u}$, $\vec{v}$ son colineales $\iff$ uno es múltiplo del otro.
(2) Los puntos A, B, C son colineales $\iff$ $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son colineales $\iff$ $C = A + t\,\overrightarrow{AB}$ para algún t (si $A \neq B$).

Prueba. (1) es la definición de dirección común (4.6). (2) C está en la recta AB $\iff$ $C = A + t\overrightarrow{AB}$ (ecuación vectorial de la recta, 4.9). ■

Ejemplo. ¿Son colineales $A = (1,2,3)$, $B = (3,1,5)$, $C = (7,-1,9)$?

$$\overrightarrow{AB} = (2,-1,2),$$

$$\overrightarrow{AC} = (6,-3,6) = 3\,\overrightarrow{AB}.$$

Sí: $C = A + 3\overrightarrow{AB}$.

Ejemplo. $(1,2,3)$ y $(2,4,5)$ no son colineales: $\frac{2}{1} = \frac{4}{2} \neq \frac{5}{3}$.

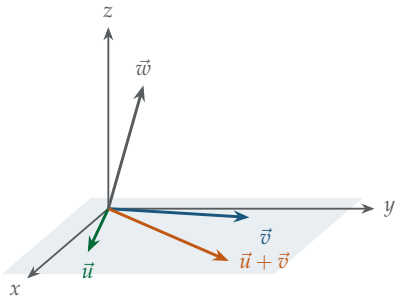
Definición. $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ son **coplanares** si tienen representantes con origen común contenidos en un mismo plano. Son **linealmente independientes** si

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0} \implies \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Teorema 15

Tres vectores son coplanares si y solo si son linealmente *dependientes* (uno es combinación lineal de los otros).

Prueba. Si $\vec{u}, \vec{v}$ no son colineales y $\vec{w}$ está en su plano, por 4.11 $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$. Recíprocamente, si $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, $\vec{w}$ es la diagonal de un paralelogramo de lados en el plano de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. (Si $\vec{u}, \vec{v}$ son colineales, los tres caben en un plano.) ■

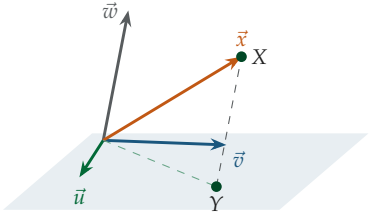


$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u} + \vec{v}$: coplanares. $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$: no coplanares.

Teorema 16 (base del espacio)

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ no son coplanares, todo vector $\vec{x}$ del espacio se escribe de manera única como $\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$.

Prueba. Existencia. Sea $\vec{x} = \overrightarrow{OX}$. La recta por X paralela a $\vec{w}$ corta al plano de $\vec{u}, \vec{v}$ (no es paralela a él) en un punto Y. Entonces $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OY} + \overrightarrow{YX}$, con $\overrightarrow{YX} = \gamma\vec{w}$ y, por 4.11, $\overrightarrow{OY} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.
Unicidad. Si hubiera dos escrituras, restando se obtendría una combinación nula con coeficientes no todos cero: los vectores serían dependientes, es decir, coplanares. ■



Ejemplo. $(2,3,4)$ en la base $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$: $\gamma = 4$, $\beta = -1$, $\alpha = -1$.

Teorema 17

Vectores no nulos y ortogonales dos a dos son linealmente independientes.

Prueba. Si $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$, multiplicamos por $\vec{u}$:

$$\alpha\|\vec{u}\|^2 + \beta\,\vec{v}\cdot\vec{u} + \gamma\,\vec{w}\cdot\vec{u} = \alpha\|\vec{u}\|^2 = 0,$$

luego $\alpha = 0$. Igual con $\vec{v}$ y $\vec{w}$: $\beta = \gamma = 0$. ■

Observación. La proyección $\text{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}$ vale igual en el espacio. Restando proyecciones se obtienen vectores ortogonales: $\vec{u} - \text{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u} \perp \vec{v}$.

Ejemplo (ortogonalizar). $\vec{v} = (1,1,0)$, $\vec{u} = (2,0,1)$:

$$\text{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \tfrac{2}{2}(1,1,0) = (1,1,0),$$

$$\vec{u} - \text{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u} = (1,-1,1),$$

y en efecto $(1,-1,1)\cdot(1,1,0) = 0$. ✓

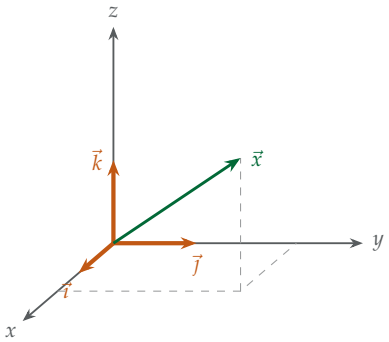
Teorema 18

Si $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ es una **base ortonormal** (unitarios y ortogonales dos a dos), entonces para todo $\vec{x}$:

$$\vec{x} = (\vec{x} \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{x} \cdot \vec{e}_2)\vec{e}_2 + (\vec{x} \cdot \vec{e}_3)\vec{e}_3.$$

Prueba. Son independientes (4.20), luego base (4.18): $\vec{x} = \sum \alpha_j \vec{e}_j$. Multiplicando por $\vec{e}_i$: $\vec{x} \cdot \vec{e}_i = \alpha_i$. ■

Definición (base canónica). $\vec{\imath} = (1,0,0)$, $\vec{\jmath} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$. Todo vector es $(x_1, x_2, x_3) = x_1\vec{\imath} + x_2\vec{\jmath} + x_3\vec{k}$.



La base canónica es ortonormal y orientada según la regla de la mano derecha.

Dirección de un vector: ángulos y cosenos directores

Definición. Los **ángulos directores** α, β, γ de $\vec{u} \neq \vec{0}$ son los ángulos que forma con $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$.

Teorema 19

$$\cos\alpha = \frac{u_1}{\|\vec{u}\|}, \quad \cos\beta = \frac{u_2}{\|\vec{u}\|}, \quad \cos\gamma = \frac{u_3}{\|\vec{u}\|},$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Prueba. $\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{\imath}}{\|\vec{u}\|\|\vec{\imath}\|} = \frac{u_1}{\|\vec{u}\|}$, y análogamente. Sumando cuadrados: $\frac{u_1^2+u_2^2+u_3^2}{\|\vec{u}\|^2} = 1$. ■

Ejemplo. $\vec{u} = (2,3,6)$, $\|\vec{u}\| = 7$:

$$\cos\alpha = \tfrac{2}{7}, \quad \cos\beta = \tfrac{3}{7}, \quad \cos\gamma = \tfrac{6}{7},$$

$\alpha \approx 73{,}4°$, $\beta \approx 64{,}6°$, $\gamma \approx 31{,}0°$.
Verificación: $\frac{4+9+36}{49} = 1$. ✓

Observación. $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$: los cosenos directores son las componentes del vector unitario.

4.24–4.27

Producto vectorial

Definición y propiedades, cálculo en la base canónica, áreas, distancias, producto mixto y triple producto vectorial (incluye 4.19).

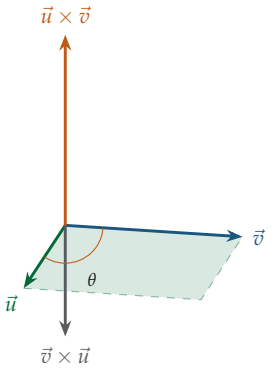
Definición del producto vectorial

Definición. Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ no son colineales, $\vec{u} \times \vec{v}$ es el vector:

1. **perpendicular** a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$;
2. de norma $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \operatorname{sen} \theta$;
3. con sentido dado por la **regla de la mano derecha**: los dedos giran de $\vec{u}$ hacia $\vec{v}$ y el pulgar señala $\vec{u} \times \vec{v}$.

Si son colineales (o alguno es nulo), $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.

A diferencia de $\vec{u} \cdot \vec{v}$, el resultado es un **vector**, y solo existe en el espacio.



La norma es el área del paralelogramo de lados $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Teorema 20

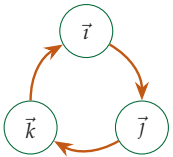
Para todos $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. $\vec{v} \times \vec{u} = -(\vec{u} \times \vec{v})$ (anticonmutativa)
2. $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$; $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \iff$ colineales
3. $(\lambda \vec{u}) \times \vec{v} = \lambda(\vec{u} \times \vec{v})$
4. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$

Prueba. (1): al intercambiar $\vec{u}$ y $\vec{v}$ el giro se invierte, y la mano derecha apunta al lado opuesto; la norma es la misma. (2): $\operatorname{sen} 0° = 0$. (3): para $\lambda > 0$ cambia solo la norma; para $\lambda < 0$ también el sentido. (4) se admite (su prueba geométrica usa proyecciones y rotaciones). ■

Teorema 21 (base canónica)

$\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k}$, $\vec{\jmath} \times \vec{k} = \vec{\imath}$, $\vec{k} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath}$, $\vec{\jmath} \times \vec{\imath} = -\vec{k}$, etc., y $\vec{\imath} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath} \times \vec{\jmath} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$.



En el sentido de la flecha el signo es $+$; en sentido contrario, $-$.

Teorema 22

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}$$
$$=(u_2v_3-u_3v_2,\ u_3v_1-u_1v_3,\ u_1v_2-u_2v_1).$$

Prueba. Escribimos $\vec{u}=u_1\vec{\imath}+u_2\vec{\jmath}+u_3\vec{k}$, igual $\vec{v}$, y desarrollamos con la distributividad y (3):

$$\vec{u}\times\vec{v}=\sum_{i,j}u_iv_j\,(\vec{e}_i\times\vec{e}_j).$$

Los términos con $i=j$ se anulan y los demás dan, por la tabla de la base canónica, $(u_2v_3-u_3v_2)\vec{\imath}+(u_3v_1-u_1v_3)\vec{\jmath}+(u_1v_2-u_2v_1)\vec{k}$. ■

Ejemplo. $\vec{u}=(1,2,-1)$, $\vec{v}=(3,0,2)$:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\big(2\cdot2-(-1)\cdot0,\quad(-1)\cdot3-1\cdot2,$$
$$1\cdot0-2\cdot3\big)=(4,-5,-6).$$

Verificación: $\vec{u}\cdot(4,-5,-6)=4-10+6=0$ y $\vec{v}\cdot(4,-5,-6)=12+0-12=0$. ✓

Teorema 23 (identidad de Lagrange)

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2.$$

Prueba. $\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2(1 - \cos^2\theta) = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 \operatorname{sen}^2\theta.$ ■

Corolario (áreas)

Área del paralelogramo de lados $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$: $\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|$.
Área del triángulo ABC: $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|$.

(Base $\|\vec{u}\|$ y altura $\|\vec{v}\| \operatorname{sen}\theta$.)

Ejemplo. $A = (1,0,0)$, $B = (0,2,0)$, $C = (0,0,3)$.

$$\overrightarrow{AB} = (-1,2,0), \quad \overrightarrow{AC} = (-1,0,3),$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (6,3,2),$$

$$\|(6,3,2)\| = 7.$$

Área $= \frac{7}{2}$. Además $(6,3,2)$ es normal al plano $6x + 3y + 2z = 6$ que pasa por los tres puntos (3.28). ✓

Teorema 24 (punto–recta)

La distancia de P a la recta $A + t\vec{u}$ es

$$d = \frac{\|\overrightarrow{AP} \times \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}.$$

Prueba. $\|\overrightarrow{AP} \times \vec{u}\|$ es el área del paralelogramo de lados $\overrightarrow{AP}$ y $\vec{u}$; dividida por la base $\|\vec{u}\|$ da la altura, que es d. ■

Ejemplo. $P = (1,2,3)$, recta $t(1,1,1)$: $\overrightarrow{AP} \times \vec{u} = (-1,2,-1)$, $d = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$.

Teorema 25 (rectas alabeadas)

Si $L_1 : A + t\vec{u}$ y $L_2 : C + s\vec{v}$ son alabeadas,

$$d(L_1, L_2) = \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}.$$

Prueba. $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ es perpendicular a ambas rectas; la perpendicular común (2.7.3) tiene su dirección, y la distancia es la componente de $\overrightarrow{AC}$ sobre $\vec{n}$ (4.15). ■

Ejemplo. $L_1 : (1,0,0) + t(1,1,0)$, $L_2 : (0,0,2) + s(1,-1,1)$: $\vec{n} = (1,-1,-2)$, $\overrightarrow{AC} = (-1,0,2)$, $d = \frac{|-1-4|}{\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{6}}$.

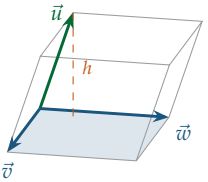
Teorema 26

El **producto mixto** $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$ cumple

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix},$$

y su valor absoluto es el **volumen del paralelepípedo** de aristas $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$.

Prueba. El determinante es el desarrollo de $u_1(v_2w_3 - v_3w_2) + u_2(\cdots) + u_3(\cdots)$. Volumen = base × altura (2.7.13): la base mide $\|\vec{v}\times\vec{w}\|$ y la altura es la componente de $\vec{u}$ sobre la normal $\vec{v}\times\vec{w}$: $h = \frac{|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|}{\|\vec{v}\times\vec{w}\|}$. Producto: $|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|$. ■



Corolario

$\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ son coplanares $\iff$ $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = 0$.

Teorema 27

El producto mixto no cambia por permutación cíclica y cambia de signo al intercambiar dos vectores:

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [\vec{v},\vec{w},\vec{u}] = [\vec{w},\vec{u},\vec{v}] = -[\vec{v},\vec{u},\vec{w}].$$

En particular $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$.

Prueba. Propiedades del determinante: intercambiar dos filas cambia el signo; una permutación cíclica son dos intercambios. ∎

Ejemplo (volumen). $\vec{u} = (2,0,0)$, $\vec{v} = (1,3,0)$, $\vec{w} = (1,1,4)$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 12 = 24.$$

Volumen del paralelepípedo: 24; del tetraedro con esas aristas: $\frac{24}{6} = 4$.

Ejemplo (coplanares). $(1,2,3)$, $(2,1,0)$, $(3,3,3)$: $1(3-0) - 2(6-0) + 3(6-3) = 0$: coplanares (el tercero es la suma de los otros dos).

Teorema 28 (expansión)

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\, \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\, \vec{w}.$$

Prueba. Comparamos la primera componente; las otras son análogas. Con $\vec{v} \times \vec{w} = (v_2w_3 - v_3w_2,\ v_3w_1 - v_1w_3,\ v_1w_2 - v_2w_1)$:

$$[\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})]_1 = u_2(v_1w_2 - v_2w_1) - u_3(v_3w_1 - v_1w_3)$$

$$= v_1(u_2w_2 + u_3w_3) - w_1(u_2v_2 + u_3v_3)$$

sumando y restando $u_1v_1w_1$: $= v_1(\vec{u} \cdot \vec{w}) - w_1(\vec{u} \cdot \vec{v})$. ■

Caracterización. $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ es combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$: está en el plano de $\vec{v}$ y $\vec{w}$ (es perpendicular a $\vec{v} \times \vec{w}$, que es normal a ese plano).

No es asociativo. $\vec{\imath} \times (\vec{\imath} \times \vec{\jmath}) = \vec{\imath} \times \vec{k} = -\vec{\jmath}$, pero $(\vec{\imath} \times \vec{\imath}) \times \vec{\jmath} = \vec{0}$.

4.28–4.29

Planos y aplicaciones

Ecuación vectorial del plano y sus propiedades; trabajo y torque.

Teorema 29

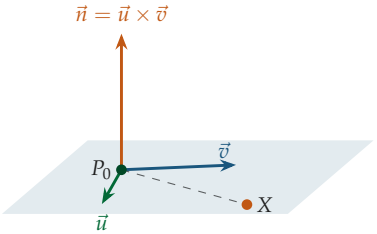
El plano que pasa por P_0 y contiene las direcciones no colineales $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es

$$X = P_0 + s\,\vec{u} + t\,\vec{v}, \qquad s, t \in \mathbb{R},$$

y su normal es $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$, de modo que

$$\vec{n} \cdot (X - P_0) = 0.$$

Prueba. X está en el plano $\iff$ $\overrightarrow{P_0X}$ es coplanar con $\vec{u}$ y $\vec{v}$ $\iff$ (4.17, 4.11) $\overrightarrow{P_0X} = s\vec{u} + t\vec{v}$. Equivalentemente (4.26), $\overrightarrow{P_0X} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$, que es la ecuación cartesiana de 3.28 con $(a, b, c) = \vec{u} \times \vec{v}$. ■



Corolario

El plano por los puntos no colineales A, B, C tiene normal $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ y ecuación $\vec{n} \cdot (X - A) = 0$.

Propiedades.

- Dos planos son paralelos si sus normales son colineales y perpendiculares si $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$.
- El ángulo entre dos planos es el ángulo entre sus normales.
- Una recta de director $\vec{d}$ es paralela al plano si $\vec{d} \cdot \vec{n} = 0$.

Ejemplo. $A = (1,1,1)$, $B = (2,3,1)$, $C = (1,2,4)$ (el ejemplo de 3.28).

$$\overrightarrow{AB} = (1,2,0), \quad \overrightarrow{AC} = (0,1,3),$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (6,-3,1).$$

$$6(x-1) - 3(y-1) + (z-1) = 0$$
$$6x - 3y + z - 4 = 0,$$

igual que antes, pero sin resolver un sistema.

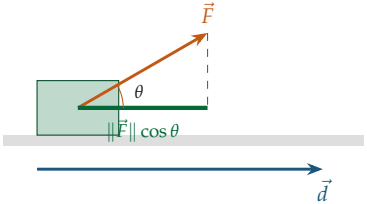
Ejemplo (ángulo entre planos). $x + y = 1$ y $y + z = 2$: $\cos\theta = \frac{(1,1,0)\cdot(0,1,1)}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$, $\theta = 60°$.

Aplicación a la física: trabajo

Definición. Una fuerza constante $\vec{F}$ que actúa sobre un cuerpo mientras este se desplaza según $\vec{d}$ realiza un **trabajo**

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = \|\vec{F}\|\|\vec{d}\| \cos\theta.$$

- Solo la componente de $\vec{F}$ en la dirección del movimiento, $\|\vec{F}\| \cos\theta$, hace trabajo (proyección, 4.15).
- Si $\vec{F} \perp \vec{d}$, el trabajo es nulo.
- Unidades: newton $\times$ metro $=$ julio (J).



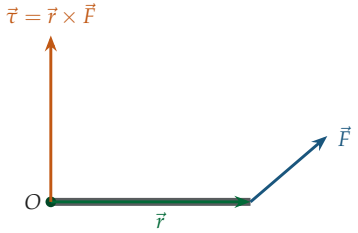
Ejemplo. $\vec{F} = (3,4,0)$ N y $\vec{d} = (5,0,0)$ m: $W = 15$ J.
Con $\vec{F} = (0,4,0)$ N: $W = 0$.

Aplicación a la física: torque

Definición. Si una fuerza $\vec{F}$ se aplica en un punto P y $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ es el vector desde el eje de giro O, el **torque** (momento) es

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}, \qquad \|\vec{\tau}\| = \|\vec{r}\|\|\vec{F}\| \operatorname{sen}\theta.$$

- $\vec{\tau}$ señala el eje de rotación (regla de la mano derecha).
- El torque es máximo si $\vec{F} \perp \vec{r}$ y nulo si $\vec{F} \parallel \vec{r}$: por eso se empuja una puerta lejos de las bisagras y perpendicularmente.



Ejemplo. Llave de 0,3 m: $\vec{r} = (0{,}3, 0, 0)$ m, $\vec{F} = (0, 20, 0)$ N.

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = (0, 0, 6) \text{ N·m}.$$

Resumen del capítulo

Herramienta	Fórmula	Para qué sirve
Norma	$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$	longitudes y distancias
Producto interno	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum u_i v_i = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$	ángulos, perpendicularidad, trabajo
Proyección	$\text{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}$	componentes, distancias
Producto vectorial	$\vec{u} \times \vec{v}$ (seudodeterminante)	normales, áreas, torque
Producto mixto	$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \det$	volúmenes, coplanaridad
Triple vectorial	$(\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$	simplificar productos
Recta y plano	$P_0 + t\vec{u},\ P_0 + s\vec{u} + t\vec{v}$	ecuaciones vectoriales

¡Gracias!

Geometría Básica · Instituto de Matemáticas · Universidad de Antioquia